

UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I  
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

*Discipline : Systèmes Complexes : phénomènes hors  
équilibre, micro et nano électronique*

*École doctorale : Mécanique, Physique et Modélisation*

par **Patrice MEUNIER**

le 17 décembre 2001

# Etude Expérimentale de Deux Tourbillons Corotatifs

---

Directeur de thèse : **M. Thomas LEWEKE**

---

**JURY :**

**M. Emil J. HOPFINGER**

**M. Patrick HUERRE**

**M. Laurent JACQUIN**

**M. Stéphane LE DIZÈS**

**M. Thomas LEWEKE**

*Directeur*

**M. H. Keith MOFFATT**

**M. GertJan F. VAN HEIJST**

*Rapporteur*

**M. Emmanuel VILLERMAUX**

**M. Charles H. K. WILLIAMSON**

*Rapporteur*



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Thomas Leweke de m'avoir proposé un sujet aussi fructueux, et de m'avoir enseigné toutes les ficelles du métier d'expérimentateur. C'est évidemment grâce à lui que le dispositif expérimental a pu être monté et que les techniques de mesure ont été aussi efficaces. De plus, sa rigueur scientifique et son grand sens de l'observation ont permis l'amélioration constante des expériences et les résultats n'auraient jamais été aussi propres sans son aide. Enfin, je lui suis reconnaissant de m'avoir appris à rédiger correctement des articles, qui est une partie souvent négligée dans la formation des chercheurs.

Je remercie aussi vivement tous les chercheurs avec qui j'ai collaboré. Je pense d'abord à Stéphane Le Dizès qui a suivi l'avancée de mes travaux tout au long de ma thèse et qui a su m'éclairer sur les points obscurs de la théorie. C'est bien de l'interaction entre Stéphane Le Dizès au niveau théorique, Florent Laporte pour les aspects numériques, et Thomas Leweke sur le plan expérimental que sont sortis tous les résultats sur l'instabilité elliptique. Ensuite, je tiens à remercier Emmanuel Villermaux qui m'a proposé un sujet de recherche qui a grandement diversifié ma culture scientifique et qui m'a fortement enthousiasmé. Enfin, je remercie Uwe Ehrenstein avec qui la collaboration a été très agréable.

Je remercie les rapporteurs Gert-Jan van Heijst et Charles Williamson d'avoir examiné ma thèse en détail, et les autres membres du jury Emil Hopfinger, Patrick Huerre, Laurent Jacquin et Keith Moffatt pour leur participation.

Je remercie ici Paul Clavin, directeur de l'IRPHE de m'avoir accueilli dans son laboratoire. Je remercie aussi grandement toute l'équipe technique qui a monté et amélioré le dispositif expérimental : Alain Fermy, Jean-Paul Ardisson, Jean Rambaldi, Stéphane Mucini, Sylvain Faguet, Matthieu Roy et Fabrice Dumas. Ils ont réussi à résoudre toutes les colles techniques qu'on leur posait, malgré les délais toujours trop courts qu'on leur imposait. Enfin, je remercie le personnel administratif sans qui le laboratoire ne pourrait ni fonctionner, ni s'animer : Michelle Santona, Michèle Gillino, Saïda Dhiflaoui, Claudine Allilèche, Delphine Lignon, Lucienne Bazzali et Marie-Pierre Carvin.

Je garde une pensée pour mes camarades du quotidien, avec qui j'ai partagé les cafés et les repas : Christophe Eloy, Jean-Jacques Lasserre, Anne Cros, François Grimal, Lionel Schouweiler, Laurent Masse, Laurent Lacaze, Fabien Harambat, Scott Davis et tous les autres.

Enfin, je ne peux m'empêcher de remercier tous ceux qui ont partagé ma vie pendant ces trois années à Marseille. Je les remercie pour tous ces

moments passés ensemble, dans la ville ou dans les Calanques, et grâce auxquels j'ai gardé le moral. Je pense bien sûr au trio infernal, Redge, Pierrot and Steph, par qui tout a commencé, mais aussi à l'ami Rémy et toute sa joie de vivre, à Christophe qui est bien plus qu'un collègue de bureau, à Aurélie qui est associée à cette période de ma vie, à Alain qui est bien plus qu'un ami d'escalade, à Gyslène qui a souffert de mes débuts de thèse, à Benoit qui m'entraînait entre planche et escalade, à Gégé pour les grandes discussions, à Patrick et Vincent qui m'hébergent gentiment, aux Aixois Greg, Gilles, Manu, Simone, Maya, Pierrick et Christelle, à Céline pour notre amitié, à Didier, Hélène et Titi pour la grimpe, à Manu pour Barcelone, à Camille la Londonnienne et Marjorie la Marseillaise, aux membres de "E dans l'A" Jean-Paul, Eva, Hélène, Vincent, Christian et Aurore, à Pierre et Céline, à Sylvain, Marianne, Mathieu, Emilie et tous les habitués du BDM, et à tous ceux qui ne sont pas sur le papier mais encore dans mes souvenirs.

Bien sûr, je n'ai pas encore cité ceux qui n'habitent pas Marseille, mais que je retrouve régulièrement: François, Emmanuelle et ma famille, Michel et Thérèse, tous les Lyonnais ou anciens Lyonnais, Vince, Anne, Flo, Sylvie, Denis, Izab, Fab, Marie, Jeff, Eric, Alexi, Mumu, les deux Nico, Hermann, Nath et Léo, et tous les Grenoblois, Sandrine, François et Claire, Florian, Sophie, Raph, Anne-Sylvie, Alexis, Allan...

Enfin j'écris une dernière phrase pour Olivier, car nos parcours semblaient très proches au début de ma thèse.

# TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction . . . . .	1
1.1 De l'importance des tourbillons . . . . .	1
1.2 Présentation de l'écoulement étudié . . . . .	5
1.3 Fusion bidimensionnelle de deux tourbillons . . . . .	7
1.4 Stabilité tridimensionnelle des tourbillons . . . . .	14
1.5 Mélange d'un scalaire . . . . .	21
1.6 Plan de l'étude . . . . .	21
2. Techniques expérimentales . . . . .	23
2.1 Montage expérimental . . . . .	24
2.1.1 Le dispositif de base . . . . .	24
2.1.2 Le dispositif de génération des vortex . . . . .	26
2.1.3 Mouvement des pales . . . . .	27
2.1.4 Le système d'acquisition . . . . .	30
2.2 Méthodes de mesure . . . . .	32
2.2.1 Visualisations au colorant . . . . .	32
2.2.2 Mesures quantitatives par PIV . . . . .	33
2.2.3 Comparaison Colorant-Vorticité . . . . .	34
2.3 Traitement des données . . . . .	36
2.3.1 Paramètres de l'écoulement . . . . .	37
2.3.2 Mesure de la distance de séparation $b$ . . . . .	38
2.3.3 Calcul de la circulation des vortex $\Gamma$ . . . . .	41
2.3.4 Détermination de la taille du cœur $a$ . . . . .	42
2.3.5 Mesure de la longueur d'onde . . . . .	46
2.3.6 Taux de croissance de l'instabilité . . . . .	46
2.3.7 Mesure de la concentration du colorant . . . . .	48
3. Analyse et traitement des erreurs en PIV . . . . .	51
3.1 Introduction . . . . .	51
3.2 Lagrangian displacement of a particle . . . . .	53
3.2.1 Background . . . . .	53
3.2.2 Calculation of the displacement . . . . .	53
3.2.3 Numerical evidence . . . . .	56
3.3 Effect of a velocity gradient on the correlation peak . . . . .	57
3.3.1 Non-deforming correlation function . . . . .	57
3.3.2 Ensemble average . . . . .	59
3.3.3 Height of the peak in the presence of shear . . . . .	60
3.3.4 Deforming correlation function . . . . .	62
3.4 Gaussian Filter . . . . .	63

---

3.5	Description of the algorithm . . . . .	66
3.5.1	First iteration . . . . .	66
3.5.2	Further iterations . . . . .	67
3.5.3	Last iteration . . . . .	67
3.6	Error estimates and optimisation . . . . .	67
3.6.1	Procedure and results . . . . .	67
3.6.2	Optimum time separation . . . . .	68
3.7	Summary . . . . .	71
4.	Fusion bidimensionnelle . . . . .	75
4.1	Description de la fusion . . . . .	76
4.1.1	Enroulement spiral des nappes . . . . .	76
4.1.2	Deux vortex quasi-ponctuels . . . . .	80
4.1.3	Fusion convective rapide . . . . .	82
4.1.4	Axisymétrisation du vortex final . . . . .	84
4.1.5	Destruction du tourbillon final . . . . .	85
4.2	Critère de fusion expérimental . . . . .	85
4.2.1	Définition de l'origine des temps . . . . .	86
4.2.2	Modèle à deux phases . . . . .	86
4.2.3	Comparaison avec les études précédentes . . . . .	88
4.3	Critère de fusion théorique . . . . .	91
4.3.1	Rôle des filaments de vortacité . . . . .	91
4.3.2	Un modèle théorique simple . . . . .	94
4.3.3	Déstabilisation convective de la paire . . . . .	99
4.4	Caractérisation du vortex final . . . . .	101
4.4.1	Conservation du moment angulaire . . . . .	101
4.4.2	Profil du vortex final . . . . .	102
4.4.3	Conservation de l'énergie . . . . .	104
5.	Instabilité tridimensionnelle . . . . .	107
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Experimental details and base flow . . . . .	110
5.2.1	Set-up and methods . . . . .	110
5.2.2	Characteristics of the two-dimensional base flow . . . . .	113
5.2.3	Measurements of the three-dimensional flow . . . . .	116
5.3	Short-wavelength three-dimensional instability . . . . .	118
5.4	Elliptic instability of vortices in a rotating strain . . . . .	121
5.4.1	Theoretical background . . . . .	122
5.4.2	Spatial structure . . . . .	124
5.4.3	Wavelength . . . . .	126
5.4.4	Growth rate . . . . .	128
5.4.5	Symmetric mode of the elliptic instability . . . . .	130
5.5	Late stages and merging . . . . .	131
5.5.1	Onset of merging . . . . .	131
5.5.2	A transient turbulent state . . . . .	132
5.5.3	Relaminarisation of the final vortex . . . . .	133
5.6	Conclusion . . . . .	135

---

6. Diffusion d'un scalaire dans une paire de tourbillons . . . . .	137
6.1 Enroulement d'une tache de colorant dans un vortex . . . . .	138
6.2 Diffusion accélérée du colorant . . . . .	138
6.3 Densité de probabilité (PDF) du champ scalaire . . . . .	143
6.4 Evolution des densités de probabilité au cours de la fusion . . .	147
7. Autres résultats et perspectives . . . . .	153
7.1 Fusion asymétrique . . . . .	153
7.2 Instabilité hyperbolique et structures secondaires . . . . .	156
7.3 Fréquence des modes de Kelvin . . . . .	158
7.4 Présence d'un écoulement axial . . . . .	160
8. Conclusion . . . . .	161
Annexe . . . . .	165
A. Instabilité tri-dimensionnelle au cours de la fusion de vortex . . .	167
B. Un critère de fusion pour deux vortex co-rotatifs bidimensionnels	169
C. Interaction contrôlée de vortex co-rotatifs . . . . .	171





## TABLE DES FIGURES

1.1	Le Point Rouge de Jupiter . . . . .	2
1.2	Tourbillons de sillage derrière un avion . . . . .	3
1.3	Fusion de tourbillons dans une couche de mélange . . . . .	4
1.4	Visualisation de tourbillons en turbulence tridimensionnelle . . . . .	5
1.5	Présentation de l'écoulement étudié . . . . .	6
1.6	Schéma de l'équilibre entre deux patches de vorticité . . . . .	8
1.7	Fusion et étirement partiels de deux patches asymétriques . . . . .	10
1.8	Classification de la dynamique de deux patches asymétriques . . . . .	11
1.9	Relation de dispersion des modes de Kelvin . . . . .	15
1.10	Instabilité elliptique pour deux tourbillons contra-rotatifs . . . . .	17
1.11	Schéma de l'instabilité de deux tourbillons contra-rotatifs . . . . .	19
1.12	Visualisation expérimentale de l'instabilité de Crow . . . . .	20
2.1	Principe de génération d'une paire de tourbillons corotatifs. . . . .	24
2.2	Schéma et photo du dispositif expérimental . . . . .	25
2.3	Mouvement de recirculation générale autour des pales . . . . .	27
2.4	Vitesse angulaire des pales qui génèrent les vortex . . . . .	28
2.5	Tourbillons contra-rotatifs liés aux vibrations des pales . . . . .	29
2.6	Trajectoires elliptiques des tourbillons . . . . .	29
2.7	Dissymétrie entre les deux tourbillons . . . . .	30
2.8	Schéma du dispositif d'acquisition . . . . .	31
2.9	Exemple de visualisation au colorant . . . . .	33
2.10	Comparaison colorant-vorticité aux instants initiaux . . . . .	35
2.11	Comparaison colorant-vorticité aux instants finaux . . . . .	36
2.12	Exemple de champs de vitesse et de vorticité . . . . .	37
2.13	Profils de vitesse et de vorticité avant fusion . . . . .	38
2.14	Evolution de la distance de séparation entre les deux vortex . . . . .	39
2.15	Evolution de la circulation totale de l'écoulement . . . . .	40
2.16	Schéma des contours utilisés pour calculer la circulation . . . . .	41
2.17	Profil de vitesse azimutale avant fusion . . . . .	42
2.18	Erreur sur la détermination de la taille du cœur . . . . .	45
2.19	Exemple de l'instabilité tridimensionnelle . . . . .	46
2.20	Simulation numérique du colorant en présence de l'instabilité . . . . .	47
2.21	Histogramme de la luminosité du fond . . . . .	48
3.1	Schematic of the symmetric/non-symmetric algorithm . . . . .	55
3.2	Error for a symmetric/non-symmetric algorithm . . . . .	57
3.3	Schematic of a typical correlation function for a shear flow . . . . .	58
3.4	Typical correlation functions obtained for a shear flow . . . . .	59
3.5	Horizontal and vertical cut of the correlation functions . . . . .	61

3.6	Height of the correlation peak for a shear stress . . . . .	62
3.7	Correlation function in the presence of a Gaussian filter . . . . .	64
3.8	False vectors in the presence of a Gaussian filter . . . . .	65
3.9	Rms errors with artificial images . . . . .	69
3.10	Minimum relative error . . . . .	71
4.1	Visualisation au colorant de la fusion bidimensionnelle . . . . .	77
4.2	Champs de vitesse de la fusion bidimensionnelle . . . . .	78
4.3	Champs de vorticité de la fusion bidimensionnelle . . . . .	79
4.4	Taille initiale des cœurs des vortex . . . . .	80
4.5	Evolution temporelle de l'orientation de la paire . . . . .	81
4.6	Evolution temporelle de la distance de séparation . . . . .	82
4.7	Evolution temporelle de la taille des cœurs . . . . .	83
4.8	Visualisation de la destruction du tourbillon final . . . . .	85
4.9	S�ch�ma explicatif des deux premières phases de la fusion . . . . .	87
4.10	Temps de fusion en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	88
4.11	Critère de fusion expérimental . . . . .	89
4.12	Champ de vitesse dans le repère tournant avec les vortex . . . . .	91
4.13	Champ de vorticité des filaments . . . . .	92
4.14	Champ de vitesse créé par les filaments de vorticité . . . . .	93
4.15	Lignes de courant de deux vortex dans le repère tournant . . . . .	95
4.16	Moment angulaire théorique en fonction de $b$ . . . . .	98
4.17	Vitesse de séparation théorique $\dot{b}$ en fonction de $b$ . . . . .	100
4.18	Profil de vorticité du vortex final . . . . .	102
4.19	Profil de vitesse du vortex final . . . . .	103
4.20	Profil de circulation du vortex final . . . . .	104
4.21	Modèle de l'évolution temporelle de la taille des c�urs . . . . .	105
5.1	Generation of the vortices . . . . .	111
5.2	Dye visualisation of the vortex pair . . . . .	112
5.3	PIV measurements of the vortex pair . . . . .	113
5.4	Profile of velocity of the vortices . . . . .	114
5.5	Evolution of the core size before merging . . . . .	115
5.6	Evolution of the separation distance . . . . .	116
5.7	Evolution of the orientation of the pair . . . . .	117
5.8	Freely developing instability . . . . .	118
5.9	Sideview visualisation of the instability . . . . .	119
5.10	Cross-cut visualization of the three-dimensional instability . . . . .	120
5.11	Schematic of the three-dimensional structure of the instability . . . . .	121
5.12	Side visualisation of a symmetric perturbation . . . . .	121
5.13	Axial vorticity contours with instability . . . . .	124
5.14	Theoretical axial vorticity . . . . .	125
5.15	Stability diagram of the instability . . . . .	126
5.16	Close-up view of the three-dimensional instability . . . . .	127
5.17	Simultaneous visualisation of two sections . . . . .	127
5.18	Evolution of the amplitude and orientation of the perturbation . . . . .	128
5.19	Growth rate as function of Reynolds number . . . . .	129
5.20	Growth rate as function of core size . . . . .	130

---

5.21	Growth rate as function of wavelength . . . . .	131
5.22	Cross-cut view of the turbulent final vortex . . . . .	132
5.23	Side view of the turbulent final vortex . . . . .	133
5.24	Close-up view of the secondary vortices . . . . .	133
5.25	Cross-cut view of the final vortex after relaminarisation . . .	134
5.26	Evolution of the core size during merging . . . . .	135
6.1	Visualisation de la spirale de colorant . . . . .	138
6.2	Schéma de l'étirement d'une tache de colorant dans un vortex	140
6.3	Concentration maximale de la spirale de colorant . . . . .	142
6.4	Concentration maximale du colorant à différents instants . . .	143
6.5	PDF de concentration du colorant aux temps courts . . . . .	145
6.6	PDF de concentration d'un scalaire dans un vortex ponctuel .	146
6.7	PDF de concentration de colorant d'un vortex aux temps longs	147
6.8	Photos d'un tourbillon lors de la fusion laminaire et turbulente	148
6.9	PDF de concentration du colorant lors de la fusion . . . . .	149
6.10	PDF de concentration du colorant lors de la fusion turbulente	150
7.1	Champs de vortacité de la fusion asymétrique . . . . .	154
7.2	Visualisation au colorant de la fusion asymétrique . . . . .	155
7.3	Structures secondaires issues de l'instabilité hyperbolique . .	157
7.4	Evolution temporelle de l'angle des modes de Kelvin . . . . .	158
7.5	Pulsation des modes de Kelvin en fonction du nombre d'onde	159
7.6	Visualisation de l'éclatement tourbillonnaire . . . . .	160



# 1. INTRODUCTION

Au cours de cette étude, nous allons analyser expérimentalement la dynamique de deux tourbillons parallèles, tournant dans le même sens, nommés vortex corotatifs. Les tourbillons sont créés sans vitesse axiale, sans stratification et dans un écoulement incompressible. Cet écoulement constitue l'une des interactions les plus simples qu'il est possible de construire avec deux tourbillons. Une autre interaction de base, constituée de deux tourbillons contra-rotatifs, c'est-à-dire tournant en sens contraire, a déjà été étudiée en détail par Leweke & Williamson (1998). Ils ont montré qu'il apparaît des instabilités tridimensionnelles à grande et à petite longueur d'onde, ainsi que des phénomènes de reconnection.

Dans notre étude, la paire de tourbillons corotatifs tourne sur elle-même. Elle rend l'écoulement instationnaire, ce qui peut grandement modifier la nature des instabilités. De plus, il apparaît un phénomène de fusion des deux tourbillons, qui peut interférer avec les éventuelles instabilités. Cette interaction est ainsi un écoulement simple, donnant lieu à de nombreux phénomènes complexes. Malgré ce caractère fondamental, il existe peu de données expérimentales sur cette interaction, ce qui motive en partie ce travail.

## 1.1 De l'importance des tourbillons

L'observation des écoulements fluides indique la présence fréquente de structures tourbillonnaires, constituées de tubes de vorticité. Nous présentons ici quelques exemples de tourbillons à diverses échelles. Ces exemples sont en rapport avec notre étude, car ils présentent des phénomènes que nous retrouverons dans notre écoulement.

Au niveau planétaire, l'atmosphère des planètes possède des structures circulaires pouvant atteindre des tailles non négligeables. Ces tourbillons sont stabilisés par la rotation de la planète et peuvent avoir des durées de vie supérieures à 300 ans, comme dans le cas du point rouge de Jupiter (voir figure 1.1) ou du point noir de Neptune. Sur notre planète, le mouvement des masses nuageuses s'organise en cyclones et anticyclones. Leurs évolutions et leurs interactions dictent les échanges de chaleur et d'humidité entre les différents points du globe, et sont à la base de la météorologie moderne. Cependant, contrairement à notre étude, ces tourbillons sont extrêmement influencés par la rotation de la terre et par leur stratification interne.

L'intérieur des planètes peut aussi créer des tourbillons. Par exemple, le noyau externe de la terre est constitué de fer à l'état liquide. La rotation propre de la terre entraîne ce fluide en un tourbillon sphérique compris

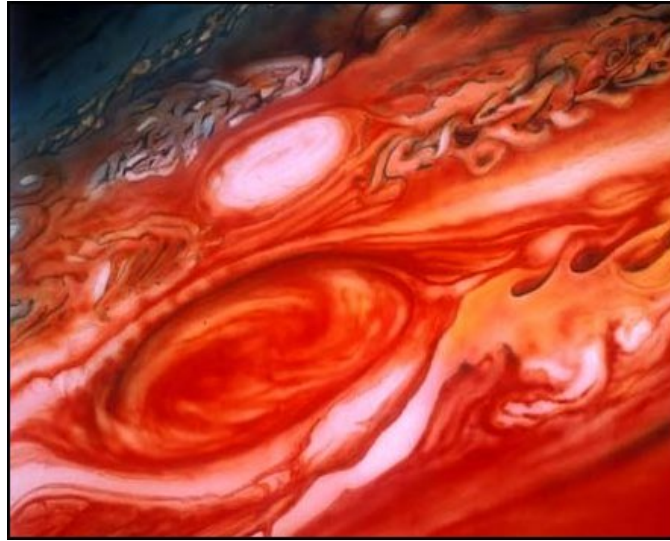


FIG. 1.1 – Photo de Jupiter, indiquant la présence de grosses structures tourbillonnaires, dont le fameux point rouge qui mesure 39000 km de long et 13000 km de large.

entre le manteau interne et le noyau interne. Les instabilités tridimensionnelles de cet écoulement, comparables à l'instabilité elliptique qui apparaît dans notre étude, semblent être à la base du champ magnétique terrestre. L'effet dynamo qui en est la cause est encore mal compris à l'heure actuelle. Néanmoins, le même effet est observable dans le soleil et toutes les planètes ou étoiles possédant un fluide conducteur en rotation.

A l'échelle humaine, des tourbillons sont créés dans les sillages d'objets, qui sont regroupés en deux classes : les objets profilés et les objets non profilés. Les sillages d'objets non profilés créent des tourbillons perpendiculaires au mouvement de l'objet. Ils se déversent alternativement dans un sens puis dans l'autre, créant une allée de Bénard-Von Karmann (voir Williamson 1996). Les instabilités tridimensionnelles de ces tourbillons semblent être liées à l'instabilité elliptique.

Les objets profilés correspondent à des ailes d'avion ou à des pales d'hélices, et induisent des tourbillons qui sont parallèles au mouvement de l'objet. Par exemple, le sillage lointain d'un avion est composé d'une paire de vortex contra-rotatifs, comme visible sur la figure 1.2(a,b). En revanche, le sillage proche d'un avion est plus complexe et dépend beaucoup de la géométrie des ailes. En position d'atterrissage ou de décollage, un tourbillon est créé au bout de chaque volet. La figure 1.2(c) montre un tel tourbillon, démarrant au milieu entre le volet et l'aile. Il tourne dans le même sens que le tourbillon de bout d'aile. Le sillage proche est ainsi composé de chaque côté d'une paire de tourbillons corotatifs, qui fusionne ensuite en un unique tourbillon. Le sillage lointain contient alors deux tourbillons contra-rotatifs hautement énergétiques, qui peuvent rester actifs plusieurs minutes. Ces tourbillons sont un danger pour les avions suivants, car ils provoquent un mouvement de roulis et un mouvement de descente, surtout sur des avions

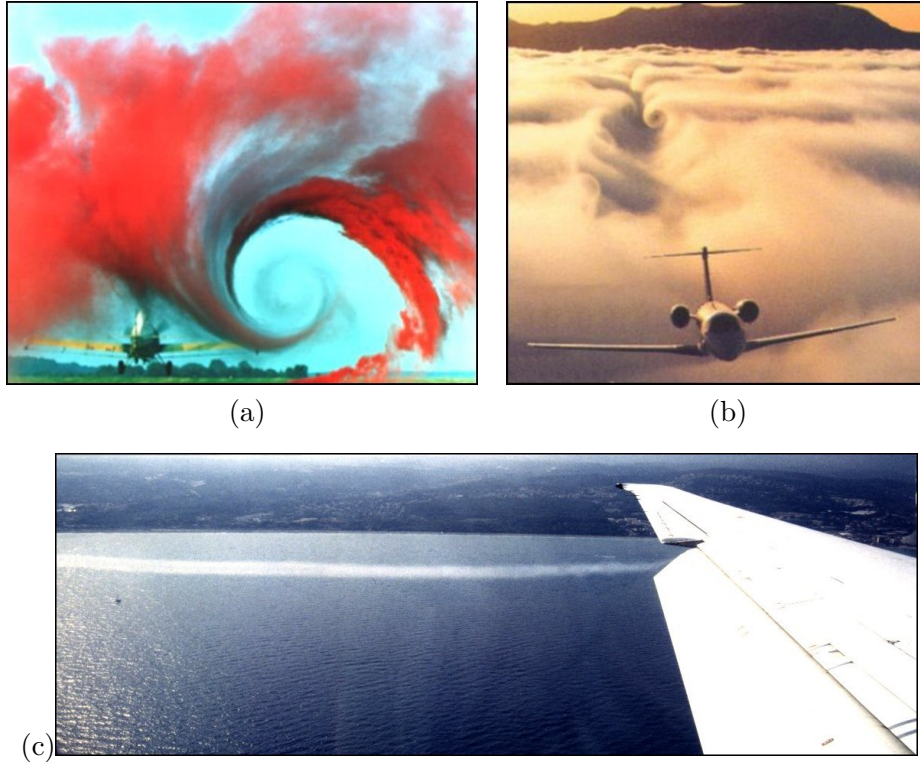


FIG. 1.2 – *Présence de tourbillons dans les sillages d'avions. (a) Visualisation du tourbillon hautement énergétique créé par une aile d'avion. (b) Le sillage lointain est composé d'une paire de tourbillons contra-rotatifs qui se translate vers le bas. (c) Photo personnelle du tourbillon créé par un volet, lors de l'atterrissage sur l'aéroport de Nice.*

de petite taille. Pour éviter les accidents graves, les aéroports doivent augmenter les distances entre deux avions successifs, limitant ainsi la cadence d'atterrissage et la capacité de l'aéroport. A l'heure actuelle, de nombreuses études cherchent à mettre en oeuvre des moyens de contrôler le sillage proche des avions en jouant sur les paires de tourbillons corotatifs, afin d'atténuer plus rapidement les tourbillons du sillage lointain. C'est pourquoi de plus amples résultats sont nécessaires sur l'interaction entre deux tourbillons corotatifs.

Dans les couches de mélange a lieu un autre type d'instabilité lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Il s'agit de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir Drazin & Reid 1981). Winant & Browand (1974) et Brown & Roshko (1974) ont montré que cette instabilité engendre des tourbillons aux fortes amplitudes. Ceux-ci tournent dans le même sens, car la vorticité de l'écoulement est toujours de même signe. La visualisation d'une couche de mélange est montr e dans la figure 1.3. Le même processus a lieu dans les jets. L'axisymétrie du jet favorise la création de tourbillons circulaires appelés anneaux de vorticité. Ces anneaux peuvent être observés par les 'ronds de fumée' qu'ils créent dans le cas de la fumée de cigarettes.

Il apparaît, au vu de ces résultats, que les tourbillons sont souvent le résultat d'une instabilité primaire d'un écoulement initialement laminaire.

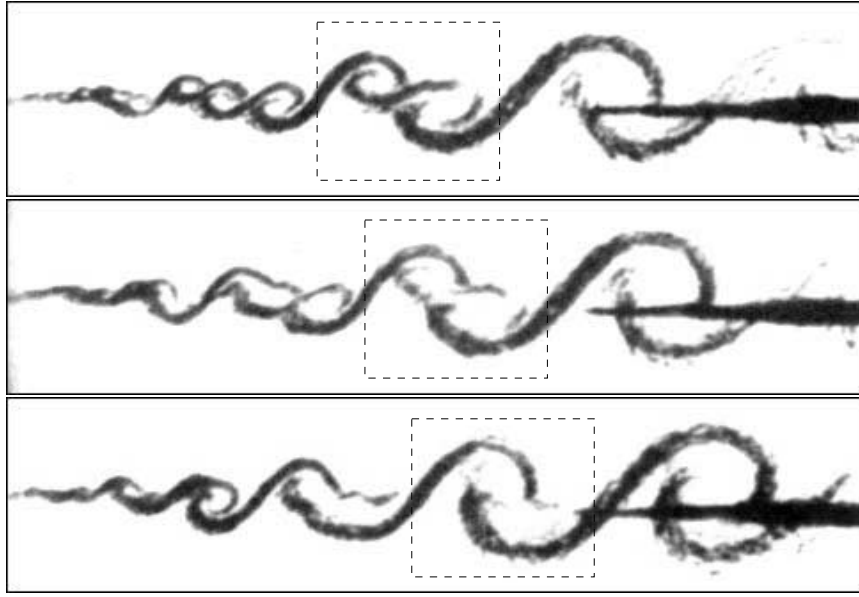


FIG. 1.3 – Couche de mélange entre de l'Azote et un mélange Hélium-Argon (d'après Roshko 1976). Les structures constituées de tourbillons corotatifs fusionnent, donnant lieu à des vortex de taille croissante

Il semble donc probable qu'ils soient à la base de la transition vers la turbulence (Orszag & Patera 1983). De plus, ces tourbillons deviennent parfois instables par rapport à des perturbations tridimensionnelles. Il sont alors un moyen efficace de créer une turbulence tridimensionnelle. Enfin, en étirant ces structures, on réduit leur taille transverse, ce qui crée une cascade d'énergie vers les petites échelles. Ce processus apparaît d'autant plus réaliste que de récentes études numériques (Vincent & Meneguzzi 1991, Kida & Okhitani 1992 et Jimenez *et al.* 1993) et expérimentales (Cadot *et al.* 1995 et Villermaux *et al.* 1995) ont montré la présence de structures tourbillonnaires, constituées de minces filaments de vorticité, dans les écoulements turbulents. Lundgren (1982) a de plus montré qu'il était possible de retrouver un spectre d'énergie variant avec le nombre d'onde à la puissance  $5/3$  en superposant des tourbillons et des nappes de vorticité, ce qui a été prédit par Kolmogorov et validé expérimentalement (voir Frish 1995).

Si les tourbillons sont effectivement à la base de la dynamique des écoulements turbulents, il apparaît nécessaire de connaître leur stabilité et la façon dont ils se déplacent, afin de pouvoir prédire leurs évolutions dans un écoulement général. L'étude de ces vortex est d'autant plus intéressante que le mouvement d'un fluide se déduit simplement de sa vorticité. L'évolution du fluide est ainsi déterminée de manière équivalente par une équation sur la vitesse ou sur la vorticité. A cause du terme d'advection dans l'équation d'évolution de la vorticité, les tourbillons suivent au premier ordre le fluide comme un filet de colorant. En négligeant la taille du cœur, nous pouvons ainsi prédire la forme et le mouvement d'un tourbillon au premier ordre uniquement. Mais l'évolution réelle du tourbillon est bien plus complexe et fait



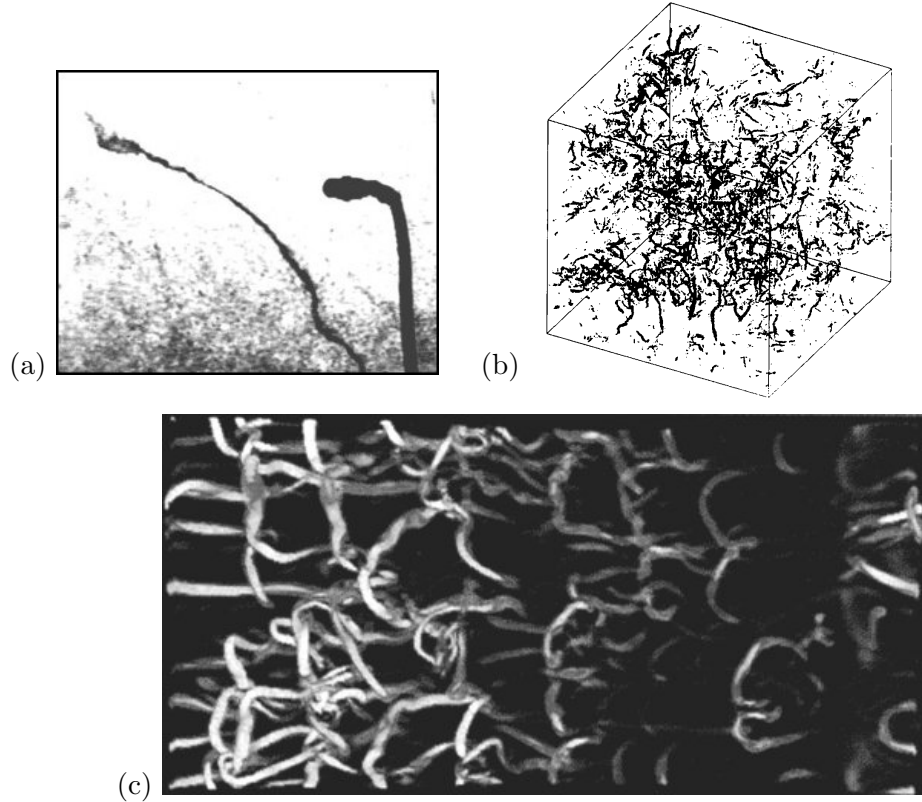


FIG. 1.4 – *Visualisation de tourbillons en turbulence tridimensionnelle: (a) expérimentalement en injectant des bulles d'air à l'aide d'une sonde (visible sur la droite de l'image) d'après Cadot et al. (1995), numériquement dans une boîte carrée d'après Vincent & Meneguzzi 1991 (b) et pour une transition vers la turbulence d'ondes de gravité d'après Arendt et al. 1998 (c).*

intervenir d'autres processus, qui ne peuvent être expliqués qu'en prenant en compte la taille non nulle du cœur du tourbillon : reconnection, instabilité elliptique, éclatement tourbillonnaire, fusion, instabilité de jets tournants. Deux de ces phénomènes apparaissent dans l'écoulement que nous allons analyser : la fusion et l'instabilité elliptique, ce qui justifie l'intérêt de notre étude.

## 1.2 Présentation de l'écoulement étudié

L'écoulement que nous allons étudier est constitué de deux tourbillons tournant dans le même sens. Ils sont représentés schématiquement sur la figure 1.5(a). Lorsque les deux vortex sont identiques, l'écoulement est caractérisé par trois paramètres qui sont :

- la circulation  $\Gamma$  de chaque vortex varie entre  $5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et  $50 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- la distance de séparation  $b$  entre les deux tourbillons est proche de la distance initiale entre les pointes des deux pales, c'est-à-dire environ 3 cm,
- la taille du cœur  $a$  de chaque vortex sera définie de manière précise dans le chapitre 2. Elle est de l'ordre de 0.5 à 1 cm.

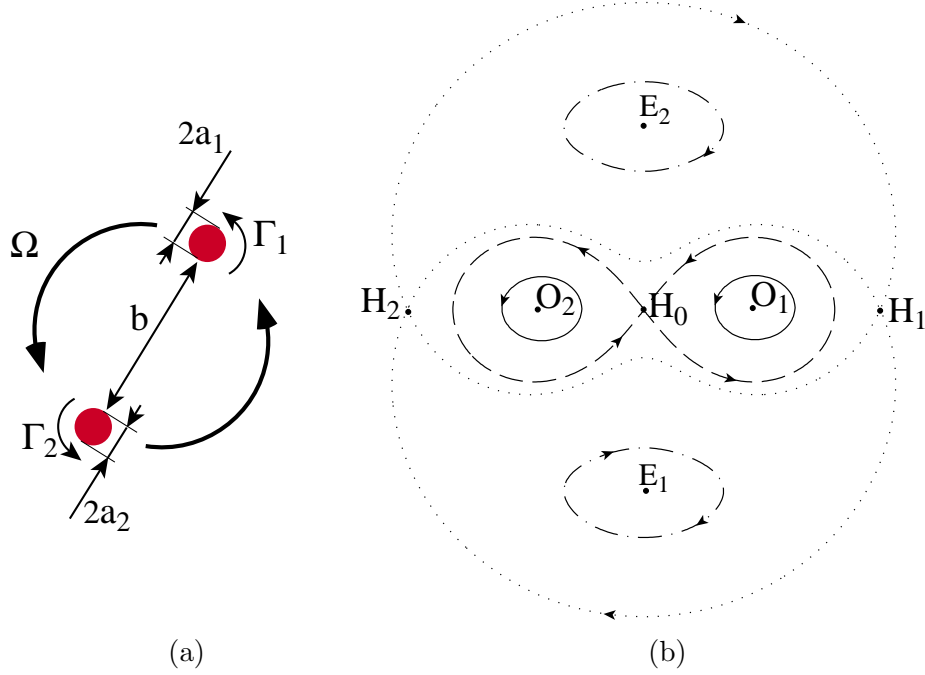


FIG. 1.5 – Présentation de l'écoulement étudié. (a) Système de deux tourbillons de tailles  $a_1$  et  $a_2$ , séparés par une distance  $b$  et de circulations  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . (b) Lignes de courant obtenues pour deux tourbillons ponctuels, dans le repère tournant avec la paire de tourbillons.

Cela permet de définir deux nombres sans dimension qui caractérisent l'écoulement initial.

- le nombre de Reynolds est défini comme le rapport entre la circulation  $\Gamma$  d'un vortex et la viscosité  $\nu$  du fluide :  $Re = \Gamma/\nu$ . Dans les expériences, nous avons fait varier le nombre de Reynolds entre 500 et 5000.
- le rapport initial  $(a/b)_0$  entre la taille du cœur  $a$  et la distance de séparation  $b$  correspond à la taille du cœur adimensionnée à l'instant initial. Il varie entre 0.15 et 0.2. Ce rapport  $a/b$  est très important car il caractérise le taux d'interaction entre les deux tourbillons.

Dans le cas d'une paire de tourbillons dissymétriques, le nombre de Reynolds est défini à partir de la circulation moyenne des deux tourbillons. La dissymétrie entre les deux circulations est alors caractérisée par le rapport  $\Gamma_1/\Gamma_2$  entre les circulations des deux vortex. Il faut aussi définir deux tailles de cœur adimensionnées  $a_1/b$  et  $a_2/b$ , correspondant à chacun des tourbillons.

Par induction mutuelle, la paire tourne sur elle-même dans le sens trigonométrique, si  $\Gamma > 0$ . Dès 1883, Lord Kelvin a montré que deux tourbillons ponctuels de même circulation possède une vitesse angulaire

$$\Omega = \Gamma/\pi b^2 \quad (1.1)$$

Ce résultat peut être généralisé dans le cas de deux tourbillons dissymétriques:

$$\Omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi b^2} \quad (1.2)$$

L'écoulement de base est donc instationnaire dans le repère fixe. C'est pourquoi il est souvent utile de se placer dans le référentiel tournant avec la paire à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Dans ce référentiel, les lignes de courant prennent une forme caractéristique. Elles sont tracées dans la figure 1.5(b), et font apparaître différents points fixes. Les points  $O_1$  et  $O_2$  correspondent aux positions des vortex. Les lignes de courant sont légèrement elliptiques autour de ces points, et nous verrons que cela entraîne une instabilité elliptique des tourbillons. Le point  $H_0$  est hyperbolique et peut faire apparaître une instabilité hyperbolique, en étirant la vorticité comprise dans le plan de figure. Nous verrons dans le chapitre 4 que les points hyperboliques  $H_1$  et  $H_2$  ont un rôle important dans le phénomène de la fusion. Enfin, les points  $E_1$  et  $E_2$  ont peu d'influence car la vorticité est ici très faible.

### 1.3 Fusion bidimensionnelle de deux tourbillons

Le mouvement de deux tourbillons ponctuels, tournant sur eux même à la vitesse angulaire  $\Omega$  donnée par (1.1) est linéairement stable en deux dimensions. Par contre, le mouvement de deux tourbillons de taille finie est plus complexe. Lorsque la taille  $a$  des tourbillons est faible, la dynamique de la paire ressemble fortement à celle de deux vortex ponctuels et la vitesse de rotation de la paire est proche de la vitesse angulaire donnée par (1.1). Lorsque leur taille  $a$  devient supérieure à une fraction de la distance de séparation  $b$  entre les cœurs, cette configuration devient instable et les deux tourbillons coalescent en un unique tourbillon. Ce phénomène a été montré numériquement (Roberts & Christiansen 1972 et Overman & Zabusky 1982) et expérimentalement dans les couches de mélange (Winant & Browand 1974, Ho & Huang 1982 et Corcos & Sherman 1984) et dans des sillages d'ailes d'avions (Brandt & Iversen 1977). La figure 1.3 montre ce phénomène de fusion dans une couche de mélange, où la croissance de la taille des tourbillons dicte la croissance de la largeur de la couche de mélange. Il apparaît ainsi un rapport critique  $(a/b)_c$  de la taille du cœur  $a$  et de la distance de séparation  $b$ , au dessus duquel les tourbillons fusionnent et en dessous duquel les tourbillons tournent sur eux-mêmes de manière stable.

#### Critère de fusion pour deux patches symétriques

Le tourbillon de Rankine constitue un modèle simple de tourbillon axisymétrique. Il est composé d'un cœur en rotation solide, entouré d'un écoulement irrotationnel. Pour un vortex de circulation  $\Gamma$ , la vitesse orthoradiale  $V_\varphi$  et la vorticité axiale  $\omega$  s'écrivent en coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ :

$$\begin{cases} r < a : & V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi a^2} r & \omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} \\ r > a : & V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} & \omega = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

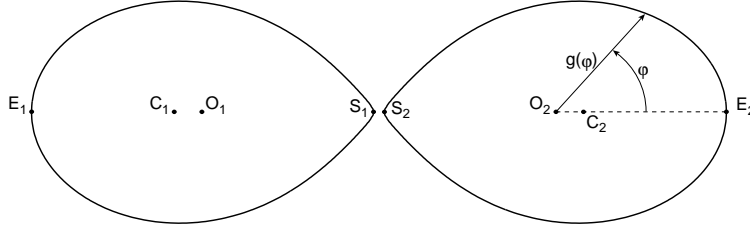


FIG. 1.6 – Définition des points caractéristiques pour deux patches symétriques de vorticité, en équilibre dans le référentiel tournant.  $O_2$  est le milieu entre  $S_2$  et  $E_2$ .  $C_2$  correspond au centre de gravité du patche.

Ce modèle de tourbillon est fréquemment utilisé car sa vorticité est constante et à support compact. Il peut être généralisé au cas non axisymétrique en prenant une vorticité constante à l'intérieur d'un contour fermé, et nulle à l'extérieur. Ces tourbillons sont souvent appelés patches de vorticité. L'écoulement extérieur dépend uniquement de la forme du contour et du niveau de vorticité. En effet, en utilisant le théorème de Stokes, la loi de Biot-Savart se met sous la forme:

$$\mathbf{v} = \iint_{\text{patche}} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{2\pi r^2} dS = - \int_{\text{contour}} \frac{\omega \log(r) d\mathbf{r}}{2\pi} \quad (1.4)$$

Ces patches sont donc des modèles de tourbillons très simple à manipuler au niveau théorique et dans des simulations numériques, car ils deviennent des objets unidimensionnels et non bidimensionnels.

De nombreuses simulations numériques ont étudié le mouvement de deux tourbillons de Rankine séparés par une distance  $b$  par des techniques de points de vorticité (Roberts & Christiansen 1972 et Rossow 1977) ou de dynamique de contours (Overman & Zabusky 1982). Il apparaît que les deux tourbillons fusionnent uniquement pour un rapport supérieur à  $(a/b)_c = 0.3$ . Ce rapport critique est obtenu en prenant  $a$  comme le rayon du vortex de Rankine initial. Au cours de la fusion, deux filaments de vorticité sont éjectés des tourbillons et s'enroulent autour du tourbillon final. Cette filamentation permet de conserver le moment angulaire de l'écoulement, et elle est à la base de l'axisymétrisation du tourbillon final (voir Melander & McWilliams 1987b).

Pour étudier la transition entre le régime stable et la fusion, Saffman & Szeto (1980) cherchèrent des solutions d'Euler contenant deux patches symétriques. Ils trouvèrent une classe de solutions dépendant uniquement de la distance  $S_1S_2$  entre les deux sommets les plus proches des deux patches (voir figure 1.6). L'étude de ces solutions montre que la surface  $A$  de chaque patche est limitée et atteint son maximum pour  $\frac{S_1S_2}{E_1E_2} = 0.066$ . Pour cette solution, en définissant  $a$  de façon que  $A = \pi a^2$ , et  $b$  comme la distance  $C_1C_2$  entre les centroïdes (c'est-à-dire les centres de gravité des patches), le rapport critique est égal à:

$$(a/b)_c = 0.315 \quad (1.5)$$

Cependant, Dritschel (1985, 1986) a montré que les solutions n'étaient stables linéairement et non-linéairement que jusqu'à une distance  $\frac{S_1 S_2}{E_1 E_2}$  légèrement supérieure, égale à 0.083. En dessous de cette limite, les patches deviennent linéairement instables : leurs contours se déforment exponentiellement, menant à la fusion des deux tourbillons en une ellipse de rapport d'aspect 1:6. Curieusement, le rapport  $a/b$  dépend très peu de ce paramètre  $\frac{S_1 S_2}{E_1 E_2}$ . Et le critère obtenu à la limite de stabilité des solutions est identique. Ce critère est proche du critère obtenu par des simulations numériques. Il est généralement admis dans la littérature pour la fusion de deux patches de vorticité symétrique. Dritschel (1985) a ensuite donné un développement limité à l'ordre quatre en  $a/b$  de la forme du patche, définie par la distance  $g(\varphi)$  au point  $O_2$  sur la figure 1.6 :

$$g(\varphi) = a \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} \right)^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{8} \left( \frac{a}{b} \right)^4 \left( 1 + \frac{191}{45} \cos^2 \varphi \right) \sin^2 \varphi \right] \quad (1.6)$$

Dans cette formule,  $a$  correspond à la moitié du diamètre le plus large du patche (c'est-à-dire la distance  $S_2 E_2$ ), et  $b$  est la distance  $O_1 O_2$ . Malheureusement, cette forme approchée diverge de la solution exacte lorsque les deux patches sont très proches. Ainsi, elle ne donne que des résultats approximatifs pour les critères de fusion.

Brandt & Iversen (1977) ont essayé de confirmer ce critère dans une soufflerie, mais la longueur insuffisante de leur tunnel ne leur permettait pas de conclure précisément. Ils ne pouvaient pas observer la divergence du temps de fusion, car cela se passait en dehors de leur zone d'observation. Pour valider expérimentalement ce critère, Griffiths & Hopfinger (1987) ont étudié le mouvement de deux anticyclones dans une cuve en rotation. Ils ont trouvé un rapport critique égal à

$$(a/b)_c = 0.30 \pm 0.02 \quad (1.7)$$

en calculant  $a$  par une approximation de la vitesse azimutale avec (1.3). Ce résultat est en accord avec les précédents critères de fusion. Cependant, pour des cyclones, la fusion avait toujours lieu, même pour des rapports  $a/b$  aussi faibles que 0.22. Cette discordance provenait de la surface parabolique du fluide, qui conduisait à un mouvement spiral et non circulaire des deux tourbillons (voir Carnevale *et al.* 1991a)

En 1988, Melander *et al.* ont essayé de décrire théoriquement la fusion de deux patches. Pour cela, ils ont intégré analytiquement le mouvement de deux patches symétriques en utilisant le Modèle du Moment Elliptique (EMM, voir Melander *et al.* 1986), qui donne analytiquement la dynamique d'un patche elliptique dans un étirement infini. Ils ont trouvé un "  tat métastable" vers lequel tendent les solutions faiblement visqueuses, correspondant à une paire de vortex stable. Cet   tat est possible uniquement pour un rapport  $a/b$  inférieur à un rapport critique :

$$(a/b)_c = 0.326 \quad (1.8)$$

Au dessus de cette valeur, il n'y a plus d'état métastable et les patches s'étirent indéfiniment, amorçant ainsi le phénomène de fusion. La légère

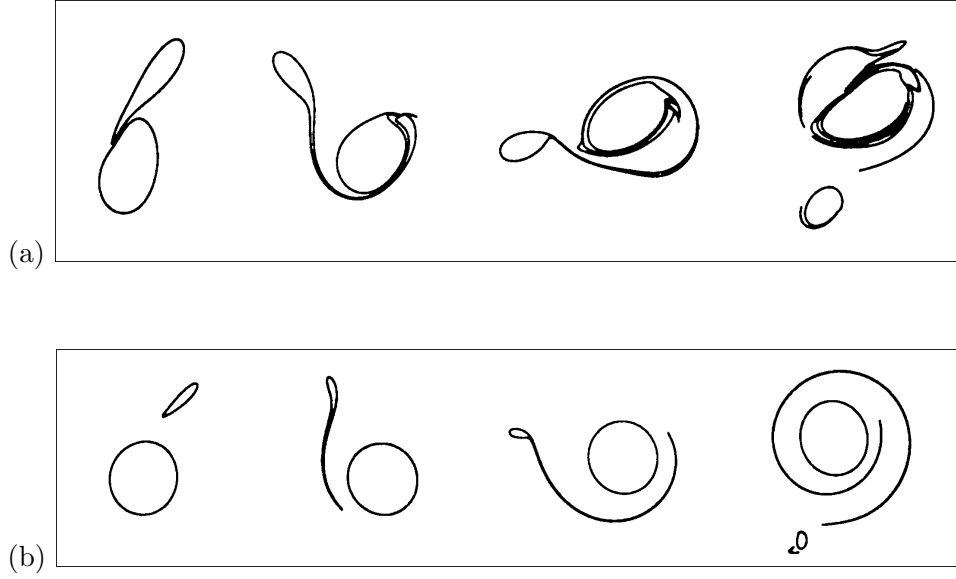


FIG. 1.7 – Fusion (a) et étirement (b) partiels de deux patches asymétriques (d'après Dritschel & Waugh 1992 ).

différence entre leur critère et celui prédit par Saffman & Szeto (1980) dans l'Eq. (1.5) est souvent négligée dans la littérature.

### Fusion asymétrique des patches

Dans leur simulation numérique par de la dynamique de contour, Overmann & Zabusky (1982) ont montré que la fusion a encore lieu dans le cas de tourbillons non symétriques. Cependant, elle apparaît plus tôt, c'est-à-dire pour des tailles de cœur plus petites (voir Rossow 1977). Weiss & McWilliams (1993) ont calculé numériquement l'évolution de deux patches elliptiques de même niveau de vorticité par l'EMM et par un fit de leurs résultats, ont obtenu un critère dépendant du rapport  $a_1/a_2 < 1$  entre les deux tailles des vortex:

$$\left(\frac{a_1}{b}\right)_c = \left[2.6 + 0.6 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right]^{-1} \quad (1.9)$$

Ce critère est en accord avec les simulations numériques par dynamique de contour et les résultats expérimentaux sur des vortex d'électrons (Mitchell & Driscoll 1996). De plus, Riccardi & Piva (1998) ont fait une analyse théorique à partir de l'EMM pour des faibles rapports  $a_1/a_2$  et ont retrouvé un critère proche de celui-ci.

Suivant le rapport de la taille des cœurs  $a_1/a_2$ , et le rapport des circulations  $\Gamma_1/\Gamma_2$ , ce peut être le vortex 1 qui s'enroule autour du vortex 2 ou le vortex 2 qui s'enroule autour du vortex 1. Melander *et al.* (1987a) ont classifié tous les cas possibles à partir de l'EMM, départageant ainsi le plan comportant les deux paramètres en deux régions distinctes.

Cependant, les résultats de l'EMM ne montrent pas le phénomène de la fusion dans sa totalité. Des simulations numériques par de la dynamique

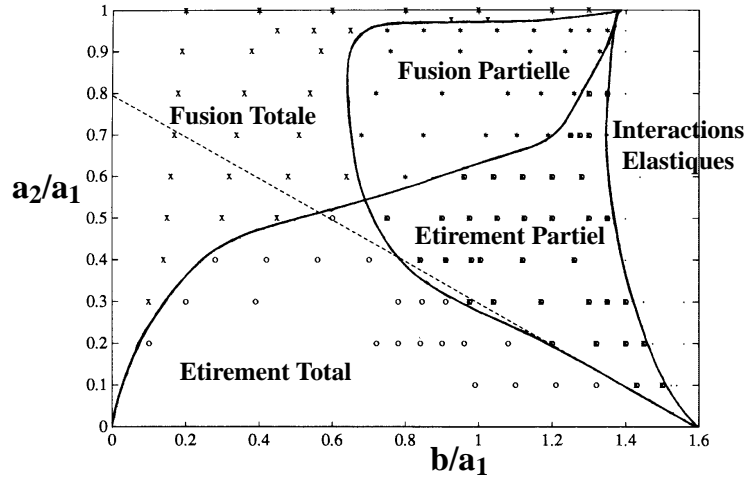


FIG. 1.8 – Classification de l'évolution de deux patches asymétriques en fonction de leur rapport de taille et de leur distance de séparation (d'après Dritschel & Waugh 1992).

de contours, faites par Dritschel & Waugh (1992) sur des patches de même niveau de vortacité, ont montré qu'il est possible d'obtenir des phénomènes plus complexes. Dans un premier cas, si le rapport  $a_1/a_2$  reste proche de 1 et que la distance de séparation est suffisamment grande, le petit vortex peut se couper en deux, une partie allant fusionner, et l'autre partie se réorganisant en un tourbillon presque axisymétrique (voir figure 1.7a). Cette fusion partielle redevient complète lorsque la distance  $b$  entre les deux tourbillons est suffisamment petite. Dans un deuxième cas, si le rapport  $a_1/a_2$  est faible, le petit tourbillon est étiré en un filament de vortacité qui s'enroule autour du gros patche sans le toucher (voir figure 1.7b). Cela correspond à l'étirement d'un tourbillon dans un étirement infini, et a été observé expérimentalement par Trieling *et al.* (1997, 1998). Comme dans le cas de la fusion, cet étirement peut rester partiel si la distance  $b$  entre les tourbillons est légèrement plus grande. Les différents cas de figure sont recensés dans la figure 1.8. Les cas de fusion partielle et d'étirement partiel n'ont jamais été observés expérimentalement, car la présence d'une viscosité très faible semble modifier radicalement la dynamique (voir Mitchell & Driscoll 1996).

La fusion asymétrique est donc un phénomène complexe, bien étudié numériquement dans le cas où les niveaux de vortacité sont égaux, mais présentant des lacunes dans le cas général. Le nombre élevé de paramètres ( $a_1/a_2$ ,  $\Gamma_1/\Gamma_2$ ,  $a_1/b$ ) rend difficile une étude exhaustive.

#### Fusion de vortex possédant un profil de vortacité continu

Le vortex de Rankine est un modèle de tourbillon facile à utiliser, mais il ne peut pas représenter les tourbillons réels. En effet, la discontinuité de la dérivée de la vitesse en  $r = a$  entraîne une contrainte infinie à viscosité non nulle. Les tourbillons trouvés dans la nature, et plus particulièrement en turbulence bidimensionnelle (voir Jimenez *et al.* 1996), sont très proches

des tourbillons de Lamb-Oseen, à profil de vorticité Gaussien:

$$\begin{cases} v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/a^2}\right) \\ \omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} e^{-r^2/a^2} \end{cases} \quad (1.10)$$

Cet écoulement est solution des équations de Navier-Stokes lorsque  $a$  évolue au cours du temps ( $a^2 = 4\nu t$ )   cause de la diffusion visqueuse (voir par exemple Saffman 1992). La question est maintenant de savoir ce que deviennent les critères trouvés précédemment dans le cas de vortex Gaussiens.

Les simulations numériques de Rossow (1977) semblent indiquer que le critère dépend fortement de la forme du profil de vorticité, lorsque  $a$  est défini par la surface du support de la vorticité. Par contre, il est possible de définir  $a$  par le défaut de la circulation (ce qui revient à le définir grâce au moment d'ordre 1 de la vorticité):

$$a = \frac{3}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\Gamma(r)}{\Gamma}\right) dr = \frac{3}{2\Gamma} \int_0^\infty r\omega dS \quad (1.11)$$

Le facteur 3/2 permet d'avoir une taille de cœur  $a$  égale au rayon du patche dans le cas du vortex de Rankine.

Il est aussi possible d'utiliser le moment angulaire du vortex  $J = \int \omega r^2 dS$  pour définir une taille du cœur :

$$a^2 = 4 \int_0^\infty \left(1 - \frac{\Gamma(r)}{\Gamma}\right) dr = 2 \frac{J}{\Gamma}, \quad (1.12)$$

Dans ces formules,  $\Gamma(r)$  correspond à la circulation sur un cercle de rayon  $r$  et  $\Gamma$  est la circulation totale du vortex. Avec de telles définitions, le critère semble être peu dépendant du profil (voir Brandt & Iversen 1977).

Par une analogie entre le mouvement des électrons dans un fort champ magnétique colinéaire à leur vitesse, Fine *et al.* (1991) utilisèrent la formule (1.11) pour définir la taille du cœur et obtinrent un rapport critique égal à :

$$(a/b)_c = 0.31 \quad (1.13)$$

Cependant, leur taille de cœur était largement dépendante de la borne supérieure utilisée dans l'intégrale, qu'ils fixèrent arbitrairement à 1.6 fois la taille du cœur.

  l'heure actuelle, deux problèmes persistent. D'une part, il existe peu d'étude théorique similaire à celle de Saffman & Szeto (1980) pour des vortex à profil de vorticité continu. Les critères qui sont donnés dans la littérature sont souvent peu précis. D'autre part, il n'y a pas d'explication physique claire du phénomène de la fusion.

## Turbulence bidimensionnelle

En 1984, McWilliams a mis en évidence la présence de tourbillons cohérents dans les écoulements turbulents bidimensionnels. La fusion des petits tourbillons en tourbillons plus gros entraîne la diminution du nombre de



tourbillons et la croissance de leur taille moyenne. Le phénomène de la fusion est ainsi au cœur de l'analyse de la turbulence bidimensionnelle car elle dicte sa dynamique. Par une étude dimensionnelle, Carnevale *et al.* (1991b) ont montré que le nombre de vortex décroît selon une loi de puissance :  $n(t) = t^{-\zeta}$ . Ce résultat a été validé expérimentalement par Tabeling *et al.* (1991) et numériquement (Weiss & McWilliams 1993 et Bracco *et al.* 2000). Par des méthodes spectrales, Weiss & McWilliams (1993) ont trouvé un exposant  $\zeta$  égal à 0.72.

Cette analyse dimensionnelle s'appuie sur la conservation d'énergie, et la conservation du niveau de vorticité au cours de la fusion. Néanmoins, cette théorie n'est pas en accord avec la conservation de la circulation, qui est pourtant valable même pour une viscosité non nulle. Cela prouve qu'une partie de la circulation n'est pas solidaire des vortex et qu'elle est éjectée sous la forme de filaments de vorticité bidimensionnels. Ces filaments contiennent une grosse partie de la circulation, mais peu d'énergie puisque leur taille est faible. Cette hypothèse semble en accord avec les résultats expérimentaux obtenus sur des colonnes d'électrons (Mitchell & Driscoll 1996), où les auteurs ont enlevé artificiellement toute la vorticité éloignée de plus de 1.6 fois la taille du cœur.

Les phénomènes de filamentation rendent l'analyse très complexe, car le nombre de filaments créés au cours de la fusion dépend fortement de la distance entre les deux tourbillons, de la vitesse de rotation de la paire et du champ de vitesse local (d  s aux vortex environnants). Il est donc difficile de donner une théorie générale, qui classe les différentes interactions entre les vortex, en turbulence bidimensionnelle (Dritschel 1995). Cependant, par une analyse statistique en utilisant de la dynamique de contour, Riccardi *et al.* (1995) ont montré que l'exposant serait beaucoup plus faible ( $\zeta = 0.23$ ), en supposant que les filaments donnent à nouveau des tourbillons de petite taille.

Ces résultats sont en désaccord avec la récente étude numérique effectuée par un code pseudo-spectral à haut nombre de Reynolds (Bracco *et al.* 2000), qui montre qu'aucune structure à petite échelle n'est générée au moment des interactions entre tourbillons.

Il y a donc deux possibilités. Soit, les études faites par de la dynamique de contour permettent d'atteindre des nombres de Reynolds très élevés, pour lesquels existe un régime avec un exposant faible ( $\zeta = 0.23$ ), diff  rent des études classiques faites par des codes spectraux. Soit, la dynamique de contour ne représente pas les phénomènes trouvés en turbulence bidimensionnelle, puisque elle donne une solution exactement non-visqueuse, et non une solution à viscosité tendant vers zéro.

De plus amples renseignements sont nécessaires pour trancher entre les deux théories, et l'étude de la fusion de deux tourbillons corotatifs pourrait être utile à ce domaine, que nous ne développerons pas au cours de notre étude.

### 1.4 Stabilité tridimensionnelle des tourbillons

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent ont été obtenus sous l'hypothèse que l'écoulement est bidimensionnel. La dynamique tridimensionnelle des tourbillons est plus complexe. Elle fait intervenir des instabilités qui brisent la symétrie par translation axiale des tourbillons infinis. Cette richesse de comportement sera analysée dans le cas d'une paire de tourbillons corotatifs au cours de notre étude. Il est ainsi nécessaire de connaître la stabilité d'une paire de tourbillons par rapport à des perturbations tridimensionnelles. Pour cela, chaque tourbillon est d'abord considéré comme subissant le champ d'étirement du vortex opposé. Nous allons donc étudier la stabilité tridimensionnelle d'un vortex unique dans un champ d'étirement plan.

#### Stabilité d'un tourbillon axisymétrique

Nous analysons en premier lieu le cas où le champ d'étirement est nul. Pour un tourbillon axisymétrique caractérisé par une vitesse orthoradiale  $V_\varphi(\mathbf{r})$ , le premier critère de stabilité a été donné par Lord Rayleigh (1916). Pour que le tourbillon soit stable par rapport à des perturbations tridimensionnelles, il faut que  $r^2 V_\varphi^2$  soit une fonction croissante de la distance  $r$ . Ceci est vérifié dans le cas où la vorticité est toujours de même signe. Dans le cas contraire, des anneaux de vorticité apparaissent dans la zone où la valeur absolue de la circulation (égale à  $|2\pi r V_\varphi|$ ) décroît. Ces anneaux sont caractéristiques de l'instabilité centrifuge et ont été mis en évidence par Taylor (1923). Il est à noter que les vortex de Rankine (1.3) et de Lamb-Oseen (1.10) vérifient le critère de Rayleigh. Ils ne sont donc pas sujets à l'instabilité centrifuge. Pourtant, le critère de Rayleigh n'est qu'une condition nécessaire de stabilité, car le tourbillon n'est pas forcément stable lorsque le critère est satisfait. Les tourbillons de Lamb-Oseen et de Rankine pourraient ainsi être sujets à d'autres instabilités.

Dès 1880, Lord Kelvin a effectué une analyse de stabilité linéaire du tourbillon de Rankine. Pour cela, il a superposé à l'écoulement de base une perturbation  $\mathbf{v}$  qu'il a décomposée sur une famille de solutions orthogonales, appelées modes de Kelvin :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}(r) e^{i(kz + m\varphi - \varpi t)} + \text{c.c.} \quad (1.14)$$

La forme du profil de vitesse  $\mathbf{u}(r)$  est déterminée par le profil de vitesse initial du tourbillon  $\mathbf{V}(r)$ . Pour un tourbillon de Rankine, chaque composante contient des fonctions de Bessel au cœur du vortex et des fonctions de Bessel modifiées à l'extérieur du cœur.

En imposant des conditions aux limites (en  $r = a$  et en  $r = +\infty$ ), on obtient une relation de dispersion  $D(k, m, \varpi)$  (voir par exemple Saffman 1992), qui permet d'exprimer la fréquence de rotation  $\varpi$  des modes, en fonction du nombre d'onde axial  $k$  et du nombre d'onde azimutal  $m$ . Cette relation de dispersion est tracée dans la figure 1.9, où seuls deux nombres d'onde azimutaux sont pris en compte. Les multiples bandes correspondent à différents profils de vitesse  $\mathbf{u}_r(r)$ , comportant un nombre croissant de zéros.

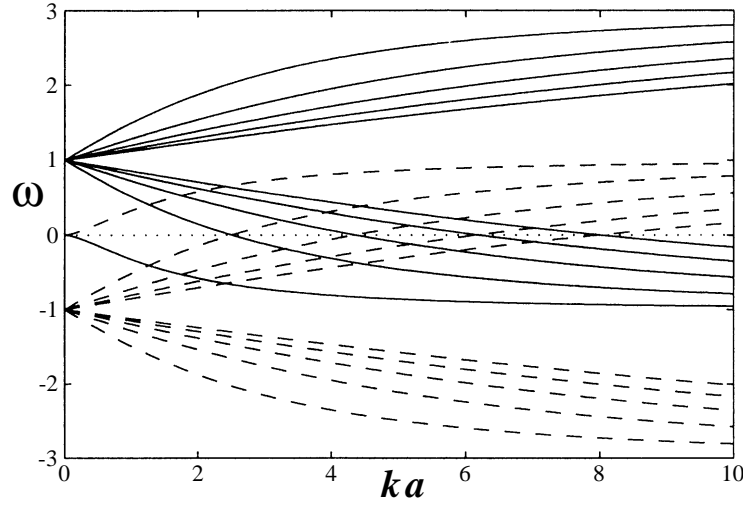


FIG. 1.9 – Relation de dispersion pour les modes de Kelvin d'un tourbillon de Rankine, avec  $m = 1$  (traits pleins) et  $m = -1$  (traits discontinus). Seules les 10 premières branches ont été représentées (d'après Eloy & Le Dizès 2001).

Il y a donc une infinité de modes de Kelvin paramétrés par  $k$ ,  $m$  et le nombre de zéros du profil de vitesse radiale.

Pour toutes ces solutions la fréquence  $\varpi$  est réelle, ce qui prouve que les modes sont neutres. Le tourbillon de Rankine est donc marginalement stable par rapport à chaque mode de Kelvin. Pour pouvoir affirmer que le tourbillon de Rankine est entièrement stable, il faudrait prouver que l'ensemble des modes de Kelvin est une famille complète. Cependant, ceci n'est pas trivial car en imposant des conditions aux limites, on a restreint l'ensemble des solutions. Il est peut-être possible de construire une solution vérifiant les conditions aux limites, en sommant des modes de Kelvin ne vérifiant pas la relation de dispersion (donc ne vérifiant pas les conditions aux limites séparément). La stabilité du tourbillon de Rankine est donc fortement probable, mais n'est pas encore prouvée.

Les modes de Kelvin sont aussi calculables dans le cas d'un tourbillon de Lamb-Oseen, mais il apparaît alors des couches critiques à l'endroit où la vitesse angulaire du tourbillon devient égale à la fréquence du mode de Kelvin. Ce problème a été résolu dans le cas visqueux par Sipp (1999). Dans ce cas, les modes deviennent amortis pour des nombres d'onde faibles.

### L'instabilité elliptique vue par les modes de Kelvin

Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976) ont effectué séparément l'analyse linéaire de stabilité d'un tourbillon dans un champ d'étiement uniforme. Cet écoulement modélise un des vortex de la paire de tourbillons contra-rotatifs, dans le flot induit par le tourbillon opposé, c'est-à-dire dans un étirement orienté à  $45^\circ$  (voir figure 1.11a). Pour cela, Tsai & Widnall ont utilisé le vortex de Moore & Saffman (1971), qui est une solution bidimensionnelle d'un patche de vortécité dans un étirement extérieur  $\varepsilon_{\text{ext}}$

d'extension spatiale infinie. Ils ont prouvé que chaque mode de Kelvin est solution à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base. A l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , l'étirement de l'écoulement de base couple deux modes de Kelvin de nombre azimutaux  $m = +1$  et  $m = -1$ . Cela entraîne une croissance exponentielle lorsque les fréquences  $\varpi$  et les longueurs d'onde  $k$  sont égales (voir Eloy & Le Dizès 1999). Cette condition correspond aux points d'intersection entre les courbes en trait plein et en trait discontinu de la figure 1.9. Pour tous ces points d'instabilité, le taux de croissance et la largeur de la bande de longueurs d'ondes instables sont proportionnels à l'étirement extérieur  $\varepsilon_{\text{ext}}$ . Robinson & Saffman (1984) ont montré numériquement que ce résultat reste valable dans le cas d'étirements finis. En particulier, pour le point d'intersection ( $ka = 2.6$  et  $\varpi = 0$ ), Tsai & Widnall (1976) ont montré que le taux de croissance est égal à :

$$\sigma = 0.57 \varepsilon_{\text{int}} \quad (1.15)$$

Cette valeur de la longueur d'onde est très proche de la valeur obtenue expérimentalement sur des anneaux de vortécité par Widnall & Sullivan (1973).

Il est à noter que l'étirement à l'intérieur du vortex  $\varepsilon_{\text{int}}$  est différent de l'étirement à l'extérieur du vortex  $\varepsilon_{\text{ext}}$ . Dans le cas particulier du vortex de Moore & Saffman (1971), l'étirement intérieur est deux fois plus grand que l'étirement extérieur.

Dans le cas du vortex de Lamb-Oseen, la technique est sensiblement identique, mais le problème ne possède pas de solution analytique simple des modes de Kelvin. La recherche d'une solution bidimensionnelle d'un vortex Gaussien dans un étirement infini (Moore & Saffman 1975b) permet de déterminer le rapport entre l'étirement au cœur du vortex et l'étirement à l'infini :  $\varepsilon_{\text{int}}/\varepsilon_{\text{ext}} = 2.52$  d'après Eloy & Le Dizès (1999). Ensuite, des conditions de solvabilité donnent le taux de croissance en fonction de produits scalaires sur les modes de Kelvin (voir Moore & Saffman 1975 et Eloy & Le Dizès 1999).

Cette instabilité a été observée expérimentalement par Malkus (1989), Thomas & Auerbach (1994) puis par Leweke & Williamson (1998), et numériquement par Laporte & Corjon (2000). Elle est représentée dans la figure 1.10. Il existe ici un tube invariant qui reste cylindrique. Ce rayon particulier correspond au rayon pour lequel la vitesse radiale du mode de Kelvin est nulle. Elle est caractéristique du deuxième mode de Kelvin (où  $u_r(r)$  contient un unique zéro).

Cette instabilité peut être vue comme une résonance triadique entre deux modes de Kelvin ( $k_1 = 2.6$ ,  $m_1 = +1$ ,  $\varpi_1 = 0$ ) et ( $k_2 = 2.6$ ,  $m_2 = -1$ ,  $\varpi_2 = 0$ ) avec l'étirement extérieur, qui est en fait une onde dégénérée ( $k = 0$ ,  $m = 2$ ,  $\varpi = 0$ ). Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes couple ces trois termes, ce qui entraîne une croissance exponentielle de la solution. Sous cet angle, cette interaction paraît généralisable au cas d'un champ d'étirement tournant, donc au cas d'une paire de tourbillons corotatifs. En effet, deux tourbillons corotatifs tournent sur eux-mêmes avec une fréquence de rotation  $\Omega$ , définie par (1.1). Chaque vortex est ainsi plongé dans un champ d'étirement qui tourne à cette même fréquence. L'étirement contient

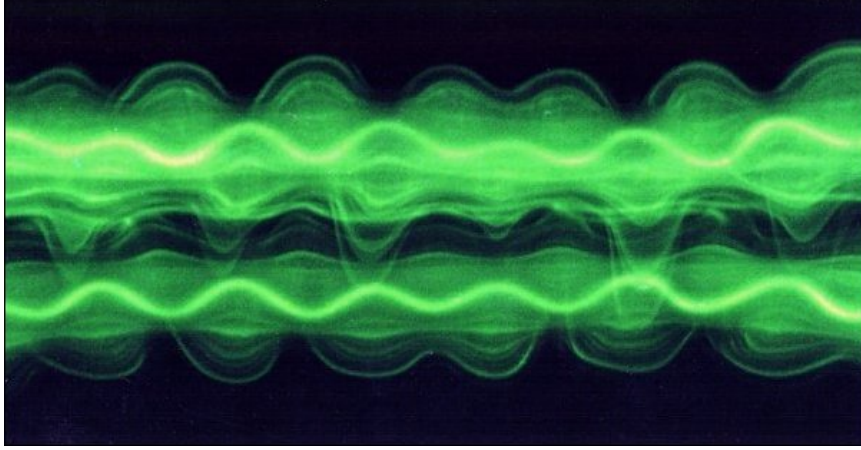


FIG. 1.10 – *Instabilité elliptique visualisée sur deux tourbillons contra-rotatifs. La présence de tubes invariants est caractéristique de la structure radiale du deuxième mode de Kelvin (d'après Leweke & Williamson 1998).*

maintenant un terme :  $\cos[2(\varphi - \Omega t)] = e^{i(2\varphi - 2\Omega t)} + c.c.$ , qui représente une onde ( $k = 0, m = 2, \varpi = 2\Omega$ ). Comme dans le cas stationnaire, la résonance apparaît pour deux ondes de Kelvin vérifiant :

$$(k_1, m_1, \varpi_1) - (k_2, m_2, \varpi_2) = (0, 2, 2\Omega) \quad (1.16)$$

Le chapitre 4 traite en détail l'instabilité elliptique dans le cas corotatif.

### L'instabilité elliptique vue par des techniques locales

Dans le paragraphe précédent, l'analyse a été effectuée sur un tourbillon possédant une taille de cœur finie, par des techniques globales qui prennent en compte le profil de vortacité. Il est apparu que l'instabilité reste concentrée dans le cœur du vortex, contrairement à l'instabilité centrifuge. Il est donc possible d'effectuer une analyse locale de la dynamique du cœur du vortex, en supposant que les longueurs d'onde radiales de l'instabilité sont très petites devant la taille du cœur. Pour cela, nous allons modéliser l'écoulement du cœur par un écoulement elliptique infini  $\mathbf{V}(r)$ . Il est constitué d'une rotation solide uniforme à la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}_0$  (cette vitesse angulaire est égale à  $\frac{\Gamma}{2\pi a^2}$  dans le cas des tourbillons de Rankine et au centre des tourbillons de Lamb-Oseen) superposé à un champ d'étirement uniforme et infini  $\varepsilon_{\text{int}}$  (tourné de  $90^\circ$  par rapport à la figure 1.11). Il est décrit dans le repère cylindrique  $(r, \varphi, z)$  par la fonction de courant :

$$\Psi = -\dot{\varphi}_0 \frac{r^2}{2} + \varepsilon_{\text{int}} \frac{r^2}{2} \cos(2\varphi) \quad (1.17)$$

Les lignes de courant sont alors des ellipses de rapport d'aspect entre le grand axe (horizontal) et le petit axe (vertical) :

$$e = \sqrt{(\dot{\varphi}_0 + \varepsilon_{\text{int}})/(\dot{\varphi}_0 - \varepsilon_{\text{int}})} .$$

En 1986, Pierrehumbert a montré numériquement que cet écoulement est instable vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. Baily (1986) a étudié théoriquement sa stabilité en ajoutant des perturbations de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{r}} \quad (1.18)$$

Il faut supposer  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$  pour éviter que le vecteur d'onde soit étiré par l'écoulement de base (Sipp & Jacquin 1998), et que le mode soit ainsi amorti par les effets visqueux. Sous cette hypothèse, les évolutions de  $\mathbf{k}$  et de  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  deviennent indépendantes. Le vecteur d'onde tourne alors sur une ellipse dans le même plan que l'écoulement, mais avec petit et grand axes inversés. Il peut s'écrire :

$$\mathbf{k}(t) = k_0 ( \sin \xi \cos(\mu t), e \sin \xi \sin(\mu t), \cos \xi ) \quad (1.19)$$

$$\text{avec} \quad \mu = \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - \varepsilon_{\text{int}}^2}$$

L'angle  $\xi$  est l'angle minimal que fait le vecteur d'onde avec l'axe ( $Oz$ ). La pulsation  $\mu$  dépend de l'angle  $\xi$ . Bayly (1986) a ainsi réduit ce problème de stabilité à un problème de Floquet sur l'amplitude  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  de l'onde. L'onde est excitée paramétriquement par l'ellipticité des lignes de courant. Une étude numérique montre que lorsque  $\xi$  est proche de  $60^\circ$ , l'onde devient instable. Par des considérations énergétiques, Waleffe (1990) a montré que le taux de croissance maximal de l'instabilité vaut :

$$\sigma = \frac{9}{16} \varepsilon_{\text{int}} \quad (1.20)$$

Cette valeur est très proche de la valeur trouvée par Tsai & Widnall (1976) dans l'Eq. (1.15). Cela prouve que c'est effectivement la dynamique du cœur qui semble gouverner la croissance de l'instabilité elliptique.

S'appuyant sur des solutions exactes de Navier-Stokes trouvées par Craik & Criminale (1986), Landman & Saffman (1987) ont montré que le résultat précédent reste valable en présence de viscosité, en rajoutant un terme visqueux  $\sigma_{\text{visqueux}} = -\nu k^2$ . Par la suite, Lifschitz & Hameiri (1991) ont généralisé cette analyse aux problèmes dans lesquels aucune équation exacte n'est disponible pour  $\mathbf{k}(t)$  (par exemple dans le cas d'un écoulement triangulaire), en utilisant les techniques WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) de l'optique géométrique.

Pour étudier le cas d'un champ d'étirement tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ , il suffit de se placer dans le repère tournant. Le Dizès (2000) a montré, en supposant  $\dot{\varphi}_0 = 1$  dans le repère tournant, que le taux de croissance est alors égal à :

$$\sigma = \frac{1}{4} \sqrt{(1 \pm \cos \xi)^4 \varepsilon_{\text{int}} - 16(1 \mp 2(1 + \Omega) \cos \xi)^2} \quad (1.21)$$

Dans le plan ( $\Omega, \xi$ ), l'instabilité est localisée dans une bande étroite de largeur et de hauteur proportionnelles à  $\varepsilon_{\text{int}}$ , autour de la courbe définie par :

$$\cos \xi = \frac{1}{2(1 + \Omega)}$$

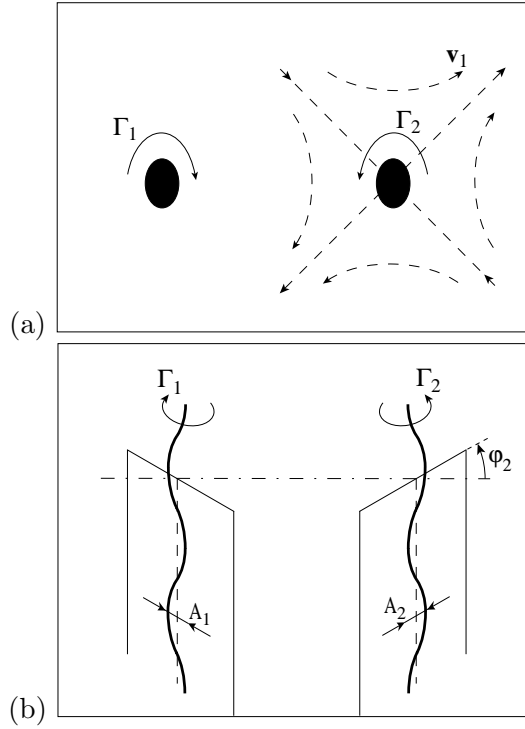


FIG. 1.11 – Schéma de l'interaction entre deux tourbillons contra-rotatifs. (a) En enlevant la vitesse de translation de la paire, le vortex 2 est soumis au champ d'étirement  $\mathbf{V}_1$ . (b) Les perturbations considérées par Crow sont des ondulations planes des tourbillons.

Nous appliquerons cette formule au cas envisagé dans cette étude, c'est-à-dire pour deux tourbillons corotatifs.

En théorie, cette instabilité possède une étendue spatiale infinie, puisqu'elle est calculée dans un écoulement infini. Cependant, en sommant plusieurs modes, Waleffe (1990) a montré qu'il est possible d'obtenir une perturbation localisée, définie par des fonctions de Bessel, comme dans les modes de Kelvin. Il apparaît donc certain que les deux analyses précédentes (globales et locales) décrivent la même instabilité. Chacune présente ses avantages. La technique des modes globaux permet de donner la longueur d'onde, car elle prend en compte la taille du cœur  $a$ . Les méthodes locales permettent de donner une formule simple pour le taux de croissance. En combinant les deux théories, il semble possible de prédire la dynamique tridimensionnelle d'un tourbillon dans un champ d'étirement uniforme. Nous allons comparer ces prédictions théoriques avec des résultats expérimentaux au cours de notre étude.

### Instabilité de Crow

Il existe une autre instabilité tridimensionnelle des tourbillons qui apparaît lors de l'interaction de deux tourbillons contra-rotatifs. En 1970, Crow a identifié une instabilité qui apparaît dans les sillages d'avions. Comme expliqué au paragraphe 1.1, le sillage lointain d'un avion est constitué en

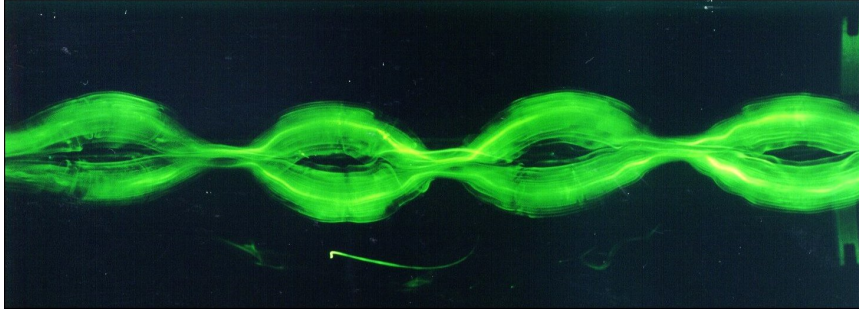


FIG. 1.12 – *Instabilité de Crow visualisée sur deux tourbillons contra-rotatifs. Aux temps longs, elle crée des anneaux de vorticité souvent observables dans les sillages d'avion (d'après Leweke & Williamson 1997).*

première approximation d'une paire de tourbillons contra-rotatifs. En supposant que la taille du cœur  $a$  est petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  de la perturbation (hypothèse filamentaire), Crow a calculé l'évolution d'une déformation sinusoïdale de chaque vortex. Chaque perturbation est définie par l'amplitude  $A$  de l'ondulation, et par l'angle  $\varphi$  que fait le plan contenant l'ondulation avec la droite reliant les deux centres des vortex (voir figure 1.11).

Pour chaque vortex, il est possible de distinguer trois effets, qui affectent la dynamique de la perturbation :

- l'effet global du vortex opposé correspond à un champ d'étirement  $\mathbf{V}_1$  orienté à  $45^\circ$ , tracé dans la figure 1.11(a). Ce champ de vitesse fait augmenter ou diminuer l'amplitude  $A_2$  de l'ondulation selon la valeur de l'angle  $\varphi_2$ . Il fait aussi tourner le plan de l'ondulation en agissant sur  $\varphi_2$ .
- l'effet de la perturbation  $A_1$  du vortex 1 implique une rotation du plan de la perturbation 2 dans le sens de rotation du vortex 2. Ceci est uniquement vrai lorsque les deux ondulations sont symétriques.
- l'effet propre du vortex sur lui-même est une rotation du plan de la perturbation, dans le sens opposé au sens de rotation du vortex. La fréquence de rotation correspond à celle prédite pour le premier mode de Kelvin (qui est effectivement négative, voir figure 1.9).

Grâce aux formules de Kelvin, Crow a montré que cette perturbation est instable aux grandes longueurs d'onde. Ceci est physiquement compréhensible, car il existe une position d'équilibre du plan de l'instabilité pour  $\varphi \simeq 48^\circ$ . Pour une telle perturbation, l'amplitude de l'ondulation croît alors sous l'influence de l'étirement  $\mathbf{V}_1$ . Le calcul indique que le taux de croissance maximal est obtenu pour une longueur d'onde variant entre 5 et 10 fois la distance entre les tourbillons, lorsque le rapport  $a/b$  reste inférieur à 0.2. Ce résultat correspond aux observations effectuées par Dee & Nicholas (1968) sur des sillages d'avions et plus tard par Leweke & Williamson (1997) dans des expériences en laboratoire. La structure de l'instabilité est caractéristique (figure 1.12) : les deux filaments ondulent de manière symétrique dans des plans orientés à  $45^\circ$ , et créent des anneaux de vorticité



aux temps longs.

Cependant, Jimenez (1975) a montré que cette instabilité n'existe pas dans le cas de deux tourbillons corotatifs. Ce résultat a été prouvé numériquement par une analyse filamentaire par Klein *et al.* (1995b), qui ont considéré les cas de deux tourbillons parallèles de différents rapports de circulation (positif ou négatif). Le cas que nous allons étudier est donc stable aux perturbations à grande longueur d'onde.

## 1.5 Mélange d'un scalaire

Une question importante de la mécanique des fluides consiste à étudier l'évolution d'un scalaire dans un écoulement turbulent. Notre écoulement étant un modèle des interactions de base qui ont lieu en turbulence, il apparaît opportun d'analyser la dynamique d'un scalaire initialement placé dans le champ de vitesse des deux tourbillons corotatifs.

Rhines & Young (1983) ont montré qu'un scalaire placé dans un unique vortex s'uniformise rapidement le long des lignes de courant. La diffusion a ensuite lieu selon un processus plus lent, selon le temps visqueux, dans la direction perpendiculaire aux lignes de courant. L'uniformisation rapide du scalaire est reliée à un phénomène d'hyperdiffusion qui provient de la présence simultanée de l'étirement (lié à la rotation différentielle) et à la diffusion. Bajer *et al.* (2001) ont récemment montré que la diffusion était aussi accélérée au centre d'un vortex, bien que la rotation différentielle s'annule en ce point.

Une question reste cependant en suspens. Que se passe-t-il au cours de la fusion des deux vortex? La transition de l'écoulement a-t-elle une influence sur la dynamique du scalaire? Nous allons étudier cette question dans le chapitre 6.

## 1.6 Plan de l'étude

Nous présentons le dispositif expérimental et l'écoulement étudié dans le chapitre 2. Nous décrivons aussi les méthodes de mesure utilisées, et analysons les différentes erreurs pouvant survenir dans les mesures ou le traitement des données.

Dans le chapitre 3, nous décrivons les méthodes que nous avons développées pour augmenter l'efficacité de l'algorithme de Vélocimétrie par Images de Particules, dans le cas d'écoulements possédant de forts gradients de vitesse.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons plus particulièrement à la dynamique bidimensionnelle de l'écoulement. Après une description du phénomène de la fusion, nous déduisons un critère de fusion expérimental, que nous comparons à un modèle simple, puis nous analysons les caractéristiques du vortex final issu de la fusion.

Dans le chapitre 5, nous analysons la dynamique tridimensionnelle de l'écoulement. L'instabilité observée est d'abord décrite, puis le taux de croissance est mesuré en fonction de la longueur d'onde, et comparé à une

prédiction théorique. Enfin, l'influence de cette instabilité sur la fusion des tourbillons initiaux est analysée.

Dans le chapitre 6, nous analysons l'évolution d'un scalaire dans cet écoulement en présence et en l'absence de l'instabilité au moyen de méthodes statistiques, afin de quantifier l'efficacité du mélange entre les scalaires des deux tourbillons initiaux.

Nous indiquons les perspectives et les résultats intermédiaires dans le chapitre 7, puis nous concluons dans le chapitre 8.

## 2. TECHNIQUES EXPÉRIMENTALES

### Résumé

L'écoulement de deux tourbillons corotatifs est créé dans l'eau par des pales, mises en rotation dans un fluide initialement au repos. Les pales sont entraînées par des moteurs pas à pas, avec une vitesse angulaire déterminée par une forme empirique qui permet un enroulement progressif et rapide de la nappe de vorticité aux temps courts, et qui conduit à des trajectoires circulaires des tourbillons aux temps longs.

L'écoulement est visualisé par du colorant, qui est initialement déposé sur le bord des pales avant de les plonger dans l'eau. De plus, nous avons effectué des mesures de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV), afin d'obtenir des champs de vitesse instantanés de l'écoulement. La corrélation entre les deux principes d'analyse est très bonne.

L'écoulement est proche de la superposition de deux tourbillons Gaussiens. Le bruit sur la mesure de la distance de séparation entr les vortex et sur la circulation des vortex est très faible (1 à 2%). Par contre, elle est très importante sur la taille des cœurs (environ 5%), qui est mesurée en utilisant le maximum de la vitesse azimutale.

Enfin, nous avons mesuré expérimentalement les caractéristiques de l'instabilité tridimensionnelle. Sa longueur d'onde est mesuré par des visualisations de côté de manière très précise. Le taux de croissance, déduit de l'amplitude de l'ondulation du colorant, possède une grande incertitude (environ 20%) qui est liée à la dispersion des mesures.

---

Pour créer deux tourbillons corotatifs, il est possible d'utiliser deux ailes orientées en sens contraires comme dans le cas de Devenport *et al.* (1999) ou d'une aile possédant des volets comme dans le cas de Chen *et al.* (1999). Pour un tel système, les vortex crées en aval des ailes, sont très turbulents, même à faible nombre de Reynolds. De plus, ils possèdent une forte vitesse axiale. Nous avons décidé de créer les tourbillons par un autre dispositif expérimental, afin d'avoir des tourbillons plus laminaires et uniformes. Nous générons deux tourbillons de démarrage par des pales, qui sont mises en rotation brusquement, dans un fluide initialement au repos. Pour obtenir des tourbillons tournant dans le même sens, il suffit de faire tourner les pales de manière symétrique. Le principe est illustré dans la figure 2.1. Cette méthode permet de créer des tourbillons très peu turbulents à l'instant initial. De plus, les tourbillons ne possèdent pas de vitesse axiale dans

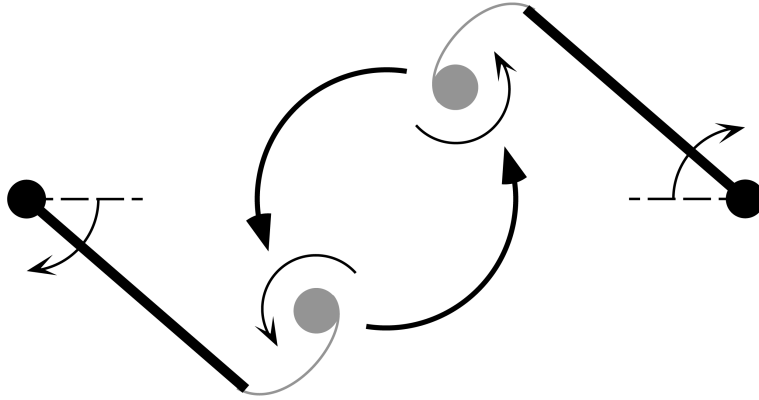


FIG. 2.1 – Principe de génération d'une paire de tourbillons corotatifs.

la zone d'observation. Contrairement aux tourbillons de sillages d'ailes, c'est un écoulement instationnaire. Nous étudions donc la dynamique temporelle et non spatiale de la paire.

Pour éviter les problèmes liés aux effets de bout dans le bas du tourbillon, nous avons utilisé un grand rapport d'aspect des tourbillons : leur longueur est environ 50 fois plus grande que leur diamètre. C'est pour cette raison que les dimensions du montage expérimental sont relativement grandes, la cuve mesurant plus d'un mètre de haut. L'expérience devient plus lourde à gérer, malgré son principe simple. De plus la présence d'une instabilité dans cet écoulement rend l'expérience très sensible aux mouvements résiduels présents dans la cuve. Cette expérience est ainsi très délicate à faire fonctionner. Nous avons dû résoudre de nombreux problèmes au cours de ma première année de thèse, en adaptant progressivement le dispositif expérimental.

## 2.1 Montage expérimental

Dans cette expérience, c'est l'évolution temporelle et non spatiale (comme dans le cas de tourbillons de sillage) qui décrit la dynamique des deux tourbillons. Il est donc nécessaire d'avoir un dispositif expérimental qui permette de créer des tourbillons dans un fluide le plus immobile possible. C'est cette condition qui a fixé le choix du montage expérimental que nous avons utilisé.

### 2.1.1 Le dispositif de base

**La cuve :** Les expériences sont effectuées dans de l'eau, contenue dans une cuve de  $50 \times 50 \times 130 \text{ cm}^3$ . Les parois de 2 cm d'épaisseur sont en Plexiglass, afin de permettre des visualisations sur le côté. La cuve est montée sur un échafaudage de 60 cm de haut, contenant un trou de 20 cm de diamètre au centre, afin de pouvoir mettre une caméra sous la cuve. Cela permet d'avoir des vues dans des plans perpendiculaires aux tourbillons, tout en évitant les

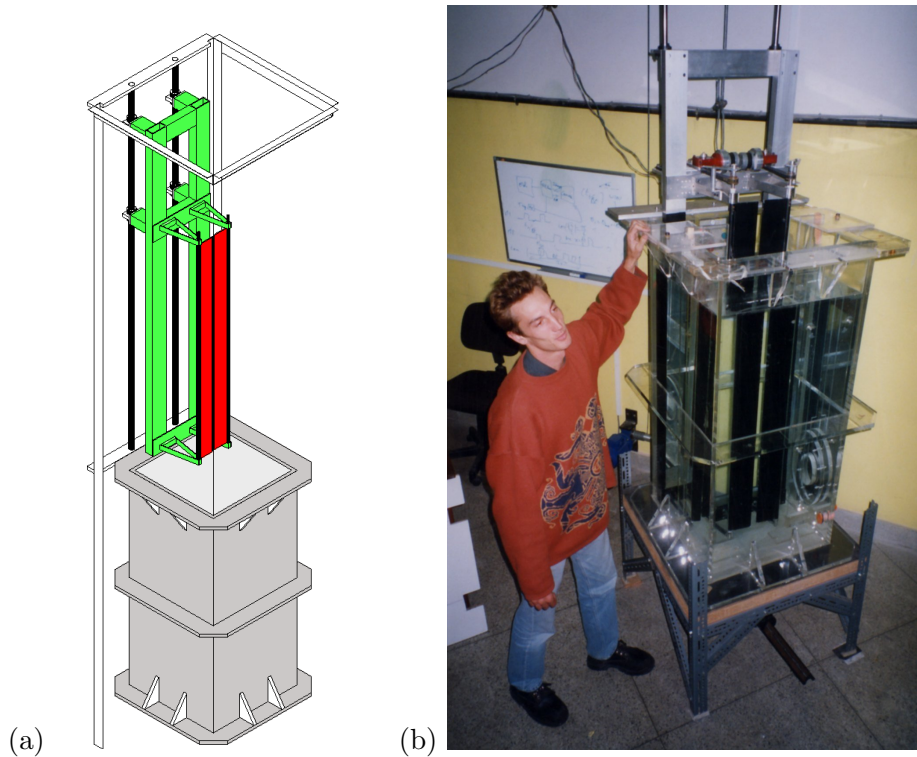


FIG. 2.2 – (a) Schéma et (b) photo du dispositif expérimental de base utilisé pour générer des tourbillons corotatifs. Les pales en rouge sont montées sur un chariot (vert) qui coulisse dans la cuve (gris clair) le long des tringles (en noir).

effets de distorsion de l'image, liés à la diffraction à la surface non plane de l'eau, pour des visualisations en vue de dessus.

L'inconvénient de cette cuve est qu'elle est relativement grande. Il est nécessaire d'attendre environ une demi-heure entre chaque expérience, afin que les mouvements résiduels soient suffisamment amortis. Cependant, même après une longue attente, le fluide n'est jamais exactement au repos car des phénomènes de convection induisent des vitesses non négligeables au sein de la cuve, notamment lorsque la température de la pièce est inférieure à la température de l'eau. Certaines journées (lorsque la température extérieure chute brutalement), il est complètement impossible de faire une expérience du fait de ces mouvements dans la cuve.

Ces mouvements résiduels limitent la bande accessible de nombre de Reynolds : en dessous d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 500, les vitesses initiales dans la cuve ne permettent plus de faire des expériences suffisamment contrôlées. De plus, l'instabilité que nous avons étudiée étant par définition très sensible au bruit, il était souvent nécessaire de faire plusieurs essais avant d'obtenir un résultat clairement identifiable.

**Le chariot :** Les pales sont montées sur un chariot en aluminium anodisé qui coulisse sur deux tringles, afin que les pales rentrent dans l'eau sans créer de perturbations. Il est constitué d'un cadre de  $130 \times 48 \text{ cm}^2$ , pesant environ 5

kilogrammes. Il est suspendu par un câble de 5 mm de diamètre, qui s'enroule sur une vis sans fin. Un aussi gros diamètre du câble est nécessaire, pour bloquer les oscillations du chariot lors de la descente dans l'eau. La vis sans fin est mise en rotation par un moteur, commandé par un boîtier externe. Un capteur de fin de course empêche le chariot de buter contre le plafond. En position basse, le chariot repose sur la cuve. Lors des expériences, la vitesse de descente est généralement réglée à  $1 \text{ cm s}^{-1}$  environ.

### 2.1.2 Le dispositif de génération des vortex

Cette partie explique en détail comment sont générés les vortex, et quelle est la loi de vitesse utilisée pour le mouvement des pales.

**Les pales :** Les pales qui génèrent les vortex sont des plaques en aluminium anodisé de dimensions  $0.5 \times 10 \times 130 \text{ cm}^3$ , biseautées à  $30^\circ$  sur l'arête qui crée les vortex. Un schéma des pales et de leur mouvement se trouve dans la figure 2.3. Les pales sont mises en rotation autour de l'arête opposée à l'arête biseautée. Le sens de rotation est choisi comme indiqué dans la figure 2.3, afin que la couche limite de vorticité possède un léger angle lorsqu'elle décroche de la pale. L'enroulement de ces couches de vorticité est alors plus propre que pour un sens de rotation opposé.

La distance initiale entre les pointes des pales peut être réglée à 5 mm près, en déplaçant les supports des pales sur le chariot. Il est ainsi possible de régler la distance initiale entre les tourbillons.

**Recirculation autour des pales :** Lorsque les pales sont centrées dans la cuve, il apparaît un mouvement de recirculation générale autour des pales, lorsqu'elles sont mises en rotation. Ce mouvement est indiqué par les flèches en gras sur la figure 2.3. Pour empêcher ce mouvement, qui diminue la circulation des vortex, nous avons installé des plaques en Pl  xiglass, reliant l'axe des pales aux bords de la cuve. Ces plaques, représentées en pointillé gras sur la figure 2.3, mesurent 1 cm d'épaisseur et 130 cm de hauteur. Leur largeur peut être réglée entre 12 et 18 cm, afin qu'elles s'adaptent aux différentes positions des pales.

**Moteurs des pales :** Les pales sont mises en rotation par deux moteurs pas-à-pas contenant 400 pas par tour. Un engrenage d'un facteur de démultiplication de 1:20 permet de réduire l'angle de rotation élémentaire lié à un pas. De plus, une courroie relie la roue dentée de sortie du démultiplicateur contenant 10 dents, à l'axe des pales prolongé par une roue dentée contenant 20 dents. Chaque pas du moteur correspond à une rotation finale de  $0.0225^\circ$  des pales, ce qui permet d'avoir un mouvement continu des pales, lissé par l'élasticité de la courroie. L'angle des pales est contrôlé à l'aide de deux potentiomètres, d'une précision d'environ  $0.1^\circ$ .

Les moteurs sont dirigés par un boîtier de commande, relié à un ordinateur *via* une carte numérique, command  e par un programme écrit sous l'environnement Labview

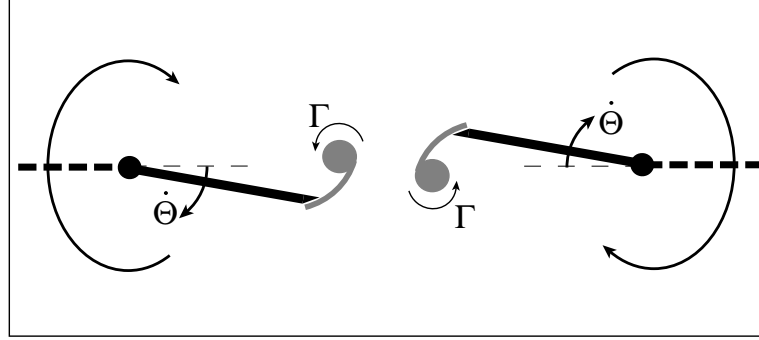


FIG. 2.3 – Schéma du mouvement général de recirculation autour des pales, bloqué par l'ajout de plaques indiquées en pointillé gras.

### 2.1.3 Mouvement des pales

Le mouvement des pales a été ajusté de manière très précise, afin que l'écoulement soit le plus représentatif de deux tourbillons Gaussiens dans un écoulement libre. Deux mois de travail expérimental par essai et erreur ont été nécessaires, pour trouver une loi de vitesse des pales appropriée.

**Loi de vitesse :** L'angle des pales  $\Theta$  est calibré à 0 lorsque les deux pales sont alignées. L'expérience démarre avec un angle initial des pales  $\Theta = -10^\circ$ , afin que les tourbillons soient complètement créés avant qu'ils interagissent. Si cet angle initial est plus grand ( $\Theta > -10^\circ$ ), chaque tourbillon est attiré par la pale qui l'a créé. Si cet angle est plus petit ( $\Theta < -10^\circ$ ), les pales passent trop rapidement et chaque tourbillon est déformé par le passage de la pale opposée. Les pales s'arrêtent lorsque l'angle atteint  $90^\circ$ , car elles sont alors suffisamment éloignées de la paire de tourbillons.

Le mouvement des pales est caractérisé par une formule qui relie la vitesse angulaire  $\dot{\Theta}$  des pales à l'angle  $\Theta$  des pales. Cette formule a été trouvée de manière empirique, et peut s'écrire :

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_{\max} \frac{C(\Delta\Theta)}{\Theta + 11^\circ} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{\Theta + 10^\circ}{\Delta\Theta}\right)^{5/4}} \right\} \quad (2.1)$$

Dans cette formule,  $\dot{\Theta}_{\max}$  est donné en  $\text{rads}^{-1}$  alors que  $\Theta$  est donné en degrés. La variation de  $\dot{\Theta}$  en fonction de  $\Theta$  et la variation de  $\Theta$  en fonction de  $t$  sont montrées dans la figure 2.4 pour différents  $\Delta\Theta$ . Nous allons expliquer ci-dessous les différents paramètres.

La constante  $C(\Delta\Theta)$  est ajustée pour chaque  $\Delta\Theta$  afin que le maximum de la formule (2.1) soit effectivement égal à  $\dot{\Theta}_{\max}$ , car le programme Labview utilise une formule normalisée. Elle vaut  $C(\Delta\Theta = 10^\circ) = 16$ ,  $C(\Delta\Theta = 15^\circ) = 24$  et  $C(\Delta\Theta = 20^\circ) = 32$ .

Les pales ne peuvent pas être mises en mouvement brutalement par un échelon de vitesse, car les pales vibrent à cause de l'élasticité des courroies. Cela crée des petits tourbillons contra-rotatifs au début de l'enroulement de la nappe de vorticité, au lieu de créer une spirale de vorticité. Une visualisation de telles instabilités de la nappe de vorticité est visible sur un des

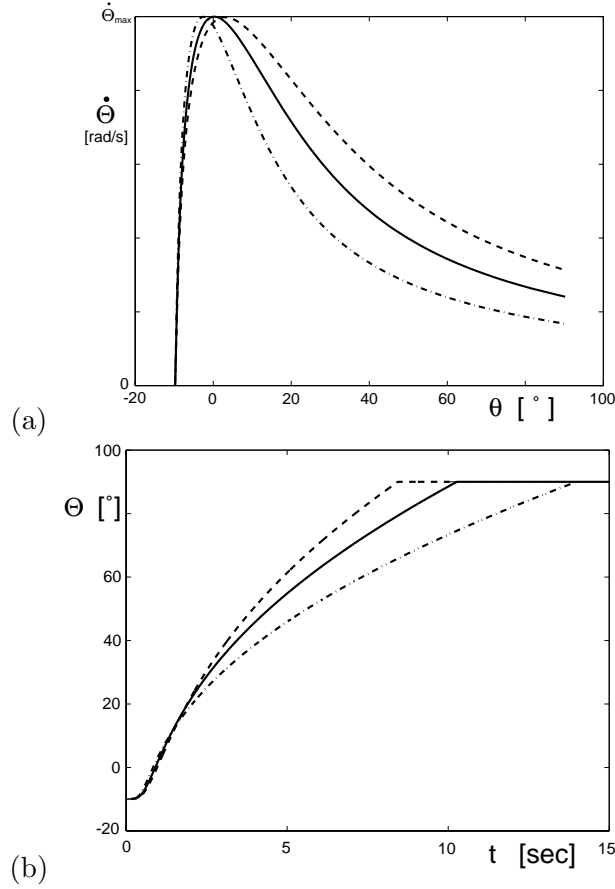


FIG. 2.4 – (a) Variation de la vitesse angulaire des pales  $\dot{\Theta}$  avec l'angle  $\Theta$ . (b) Evolution temporelle de l'angle  $\Theta$  des pales pour une vitesse maximale  $\dot{\Theta}_{\max} = 0.4 \text{ rad s}^{-1}$ . Le paramètre  $\Delta\Theta$  défini dans la formule (2.1) vaut  $10^\circ$  pour la courbe en traits mixtes,  $15^\circ$  pour la courbe en trait plein, et  $20^\circ$  pour la courbe en trait pointillés.

vortex de la figure 2.5. Pour pallier cette déformation, nous avons dû créer un profil de vitesse continu. L'exposant  $5/4$  trouvé dans l'exponentielle de l'Eq. (2.1) permet d'avoir une accélération progressive et rapide des pales, au début du mouvement. En effet, la variation de  $\Theta$  est alors  $(\Theta + 10) \sim t^{4/3}$  dans les instants initiaux, ce qui est suffisant pour que les pales se mettent en mouvement continûment en l'espace d'environ une seconde. Un exposant  $9/8$  ou  $16/15$  aurait été aussi efficace. Mais l'exposant 2, qui avait été testé au départ (calqué sur la Gaussienne), donnait une variation trop lente.

La variation finale de l'angle des pales a été choisie de manière à ce que la pale ne crée plus de vorticité, une fois qu'elle est loin de la paire de tourbillons. Or, la circulation des tourbillons étant finie, la vitesse azimutale  $v_\varphi$  est proportionnelle à  $r^{-1}$ . Nous avons ainsi pensé qu'il fallait que la vitesse des pales décroisse comme  $\dot{\Theta} \sim \Theta^{-1}$ , afin qu'elle soit proche de la vitesse du fluide. C'est effectivement le cas aux temps longs dans la formule (2.1).

D'autre part,  $\Delta\Theta$  a été aussi optimisé pour que le mouvement des tourbillons soit exactement circulaire. En effet, si  $\Delta\Theta$  est trop grand, les pales



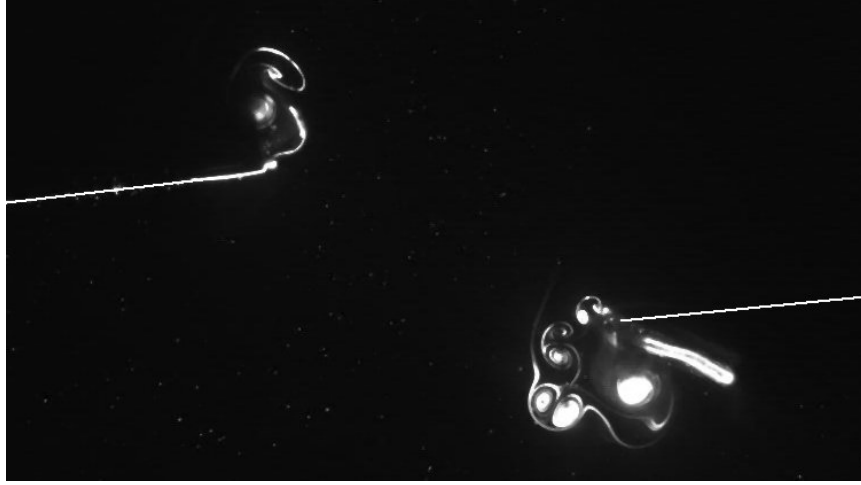


FIG. 2.5 – Visualisation des tourbillons contra-rotatifs créés par la vibration de la pale dans le cas d'une mise en rotation brutale des pales.

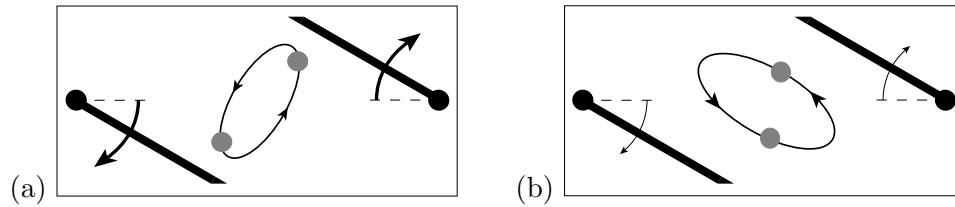


FIG. 2.6 – Schéma décrivant la trajectoire elliptique des tourbillons, à cause d'une vitesse (a) trop rapide et (b) trop lente des pales.

ne ralentissent pas suffisamment vite et les tourbillons sont entraînés par les pales. Le mouvement des deux tourbillons est donc elliptique, avec le grand axe orienté perpendiculairement aux pales, comme dans la figure 2.6(a). Au contraire, si  $\Delta\theta$  est trop petit, les pales freinent la vitesse de translation des tourbillons et le mouvement des tourbillons devient elliptique avec un grand axe parallèle aux pales, comme sur la figure 2.6(b). Entre les deux, il existe un  $\Delta\theta$  optimal, qui est proche de  $15^\circ$ . La valeur de  $\Delta\theta$  peut être légèrement modifiée, entre 10 et 20 degrés, afin de régler faiblement la taille du cœur des vortex. Cependant les variations de la taille du cœur sont petites, car  $\Delta\theta$  ne peut pas varier beaucoup : si  $\Delta\theta$  est trop grand, la nappe de vortécité devient instable dans les instants finaux, par rapport à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et génère des petits tourbillons secondaires, visibles sur la figure 2.9.

**Dissymétrie des tourbillons :** Au premier essai, les tourbillons apparaissaient hautement dissymétriques. Nous avons donc diminué la valeur de la constante  $C(\Delta\theta)$ , pour la pale créant le plus gros vortex, afin d'équilibrer la circulation des deux vortex. Ce réglage est nécessaire à 1% près, et ne permet d'obtenir qu'une précision de 5% sur le rapport des circulations. En effet, lors de la création des vortex, l'écoulement est instable par rapport

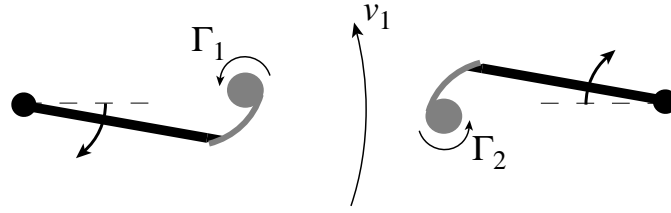


FIG. 2.7 – Explication de l'instabilité conduisant à deux tourbillons dissymétriques, par influence du vortex 1 sur la création de la couche de vorticité 2.

   une dissymétrie initiale dans les circulations des vortex. Le principe peut être explicité comme suit, à l'aide de la figure 2.7 : si le vortex 1 possède une circulation  $\Gamma_1$  légèrement supérieure au vortex 2 ( $\Gamma_2$ ), il apparaît une vitesse  $v_1$  plus importante dans le sens de  $\Gamma_1$ . La pale 2, qui est plongée dans le champ de vitesse  $v_1$ , a un mouvement relatif au fluide plus faible qu'en l'absence de cette survitesse. La vorticité qui est créée le long de la pale 2 est ainsi plus faible et conduit à une circulation dans le vortex 2 plus faible qu'en l'absence de la survitesse initiale. Si  $\Gamma_2$  est plus faible, la cr   ation de vorticité le long de la pale 1 est alors plus importante par le même raisonnement, ce qui conduit à une circulation  $\Gamma_1$  plus importante. C'est pourquoi une légère dissymétrie initiale dans les tourbillons, liée par exemple à des mouvements résiduels dans la cuve ou à une dissymétrie dans le montage, est amplifiée par ce mécanisme. Malheureusement, la dissymétrie initiale n'est pas entièrement reproductible et il fallait un peu de chance pour obtenir des écoulements symétriques à moins de 5% près.

#### 2.1.4 Le système d'acquisition

L'écoulement a été analysé par des visualisations au colorant ou par des mesures quantitatives sur des champs de vitesse, effectuées par de la Vélocimétrie par Images de Particules (PIV). C'est pour cette raison que le système d'acquisition était constitué essentiellement de caméras ou d'appareils photos. Nous allons décrire tout le matériel utilisé dans ce paragraphe.

**Laser :** Nous avons utilisé un laser Argon d'une puissance de 5 Watts, dont la lumière est transportée par une fibre optique. Le montage expérimental est schématisé dans la figure 2.8. En sortie de la fibre optique, une lentille cylindrique créée une tranche lumineuse de 5 mm d'épaisseur. La lentille cylindrique peut être remplacée par une grosse lentille sphérique, afin d'avoir un cône vertical de lumière d'un diamètre maximal de 20 cm, pour les visualisations en volume. La lumière du Laser Argon est tout à fait adaptée à la Fluorescéine (qui est le colorant que nous avons utilisé), car sa raie la plus lumineuse correspond au domaine de fluorescence de la Fluorescéine. C'est pourquoi nous avons essayé d'utiliser ce laser au maximum, plutôt que d'utiliser une source de lumière blanche.

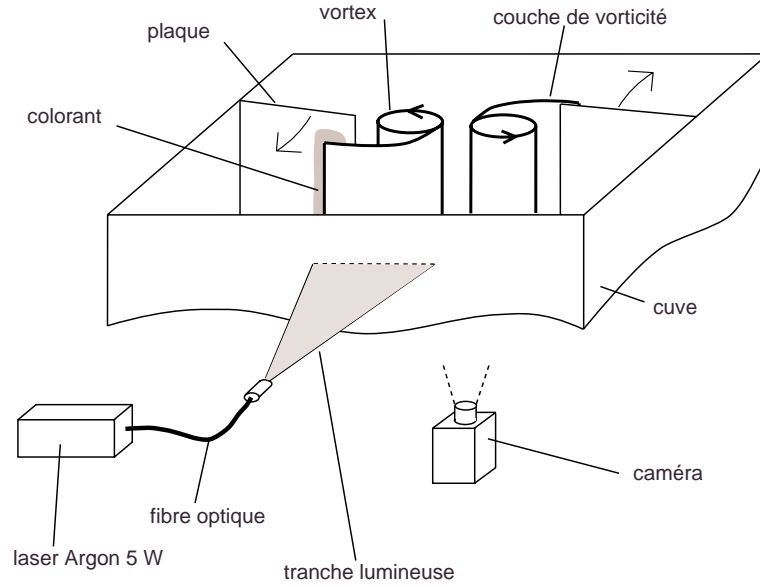


FIG. 2.8 – Schéma du dispositif d'acquisition.

**Caméra numérique :** Toutes les acquisitions d'images pour la PIV ont été faites avec la caméra numérique Kodak Megaplug ES 1.0, d'une haute résolution de  $1008 \times 1018$  pixels<sup>2</sup>. Un objectif de 50 mm (f/1.8) ou de 135 mm (f/2.8) peut être placé sur cette caméra. Cette caméra permet de prendre 30 images à la seconde, mais l'ordinateur limitait le nombre d'images à 300. Cela ne permettait qu'une acquisition de 10 secondes maximum. Néanmoins, en utilisant deux lasers mini-Yag synchronisés avec la caméra, nous avons pu faire des acquisitions de paires d'images. L'intérêt réside dans le fait que le temps entre les deux images d'une même paire peut être baissé jusqu'à une valeur de  $1 \mu\text{s}$ , alors que le temps entre deux paires d'images reste grand. Cela permet de faire des acquisitions des champs de vitesse sur des longues durées avec des nombres de Reynolds élevés.

**Caméscope :** Nous avons utilisé un caméscope, couplé à un magnétoscope, pour enregistrer l'évolution grossière des phénomènes pendant les périodes d'essai. De plus, l'utilisation du caméscope en parallèle avec la caméra numérique, a permis de suivre l'évolution de l'instabilité tridimensionnelle suivant plusieurs vues simultanément. Cela est particulièrement important pour l'analyse du taux de croissance en fonction de la longueur d'onde. La caméra numérique prend des images dans des sections perpendiculaires aux tourbillons, ce qui permet d'obtenir le taux de croissance par analyse des visualisations, et le champ de vitesse par PIV. Simultanément, le caméscope prend des images suivant une vue de côté, d'où l'on déduit la longueur d'onde.

**Appareil Photo :** Pour obtenir des photos de haute qualité, nous avons utilisé un appareil photo, avec un objectif de 50 mm (f/1.8), ainsi que des

pellicules photos d'une sensibilité de 400 ou 800 Asa. Cela a permis de faire des visualisations de la fusion de deux vortex ou de l'instabilité elliptique, publiées dans plusieurs revues (Meunier & Leweke 1999a, 2000a, 2000b).

En conclusion, le caractère instationnaire et instable de l'écoulement étudié rend cette expérience très délicate. Nous avons modifié progressivement le dispositif expérimental, afin de résoudre les problèmes liés à la convection, à la recirculation autour des pales, à la dissymétrie des tourbillons, aux instabilités de la nappe de vorticité, à l'ellipticité des trajectoires des vortex et aux effets de bout en bas du tourbillon. De plus, de multiples précautions ont été prises à postériori pour s'assurer de la validité des résultats.

## 2.2 Méthodes de mesure

### 2.2.1 Visualisations au colorant

Nous avons utilisé des colorants pour visualiser la position et la forme des tourbillons. La Fluorescéine est un colorant vert très efficace, car elle fluoresce exactement à la longueur d'onde principale du laser Argon (488 nm). Mais pour distinguer les deux vortex, nous avons aussi utilisé de la Rhodamine B, qui est beaucoup moins lumineuse lorsqu'elle est éclairée par un laser Argon, et qui donne une couleur orange. Nous avons dû utilisé de la Rhodamine B très concentrée afin de pouvoir visualiser les deux colorants en même temps. Nous avons deux principes d'injection du colorant.

**Peinture sur le bord des pales :** La première méthode consiste à déposer le colorant sur la partie biseautée de la pale, sur une largeur d'environ 1 mm le long de l'arête. Pour avoir une pâte assez épaisse, les colorants initialement en poudre, sont dilués dans de l'eau, puis mélangés à une pâte acrylique utilisée en peinture d'aquarelles. Le colorant peut alors être enduit facilement sur la pale, lorsqu'elle est au dessus de l'eau. Les pales sont ensuite insérées lentement dans l'eau grâce au chariot. Après 20 secondes environ, le fluide est de nouveau immobile et il est possible de faire une expérience.

Le colorant est déposé sur une hauteur d'environ 15 à 20 cm, 20 cm sous la surface, c'est-à-dire dans la zone où les tourbillons sont les plus uniformes suivant la direction axiale. La tranche lumineuse traverse les tourbillons au milieu de la zone marquée par le colorant, et donne des images semblables à la photo de la figure 2.9. Nous montrerons dans la section 2.2.3 que l'évolution du colorant donne de grandes informations sur le champ de vitesse bidimensionnel. De plus, nous montrerons dans le paragraphe 2.3.6 que les visualisations permettent de déterminer le taux de croissance et la longueur d'onde de l'instabilité tridimensionnelle.

**Injection par un tube :** Nous allons analyser dans le chapitre 6 l'évolution d'une tache de colorant dans l'écoulement étudié. Pour pouvoir normaliser les densités de probabilité de la concentration du colorant, nous avons besoin de connaître exactement la concentration initiale du colorant. Ceci

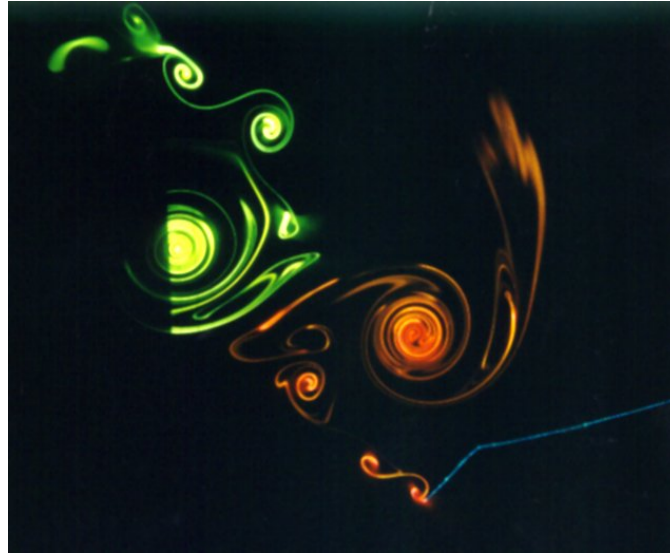


FIG. 2.9 – Visualisation des tourbillons créés par les deux pales par du colorant peint sur le bord des pales. Lorsque la vitesse des pales décroît trop lentement, la nappe de vortécité est soumise à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui crée des vortex secondaires.

n'est pas possible avec la méthode décrite ci-dessus. Nous avons donc décidé d'injecter le colorant (qui est maintenant sous forme liquide très diluée) à l'aide d'un tube vertical, placé 10 cm en dessous de la tranche lumineuse. La température du colorant est en général plus élevée que l'eau de la cuve, car elle est à la température de la pièce, qui est plus chaude dans la journée. Le colorant remonte alors dans le fluide le long de la pale, créant ainsi une colonne de colorant, d'un diamètre égal au diamètre du tube (5 mm). Cette colonne est placée au milieu de la partie biseautée, c'est-à-dire à 3 mm de l'arête de la pale. Avant de commencer l'expérience, le tube est retiré doucement sur le côté, afin que la circulation des tourbillons ne varie pas avec la hauteur, car cela entraîne un écoulement axial. Cette technique d'injection de colorant permet d'étudier l'évolution d'un scalaire passif dans le champ de vitesse de deux tourbillons, et d'analyser le mélange entre les deux tourbillons lors de la fusion.

### 2.2.2 Mesures quantitatives par PIV

Grâce à la caméra Kodak haute résolution, nous avons pu prendre des paires d'images très rapprochées. En ensemençant l'eau par des particules réfléchissantes, il est possible d'analyser les déplacements des particules entre les deux images, et d'en déduire le champ de vitesse bidimensionnel instantané. Les particules ont été achetées chez Optimage, et ont un diamètre de l'ordre de  $50\ \mu\text{m}$ . Bien que la taille des particules paraisse grande, elles sont de deux ordres de grandeur plus petites que la longueur caractéristique de l'écoulement, représentée par la taille des cœurs, ce qui est suffisant pour qu'elles suivent correctement la vitesse du fluide.

L'analyse des images est faite automatiquement par un algorithme d'in-

tercorrélation, écrit sous l'environnement Matlab. Nous avons dû faire face à un problème lié au type d'écoulement étudié : les écoulements tourbillonnaires. En effet, au cœur des vortex la vorticité est très importante, et les algorithmes de corrélation classiques ne sont plus efficaces. Au cœur des tourbillons, aucun vecteur vitesse ne peut être détecté par les algorithmes normaux. Le profil de vitesse des tourbillons ne peut donc pas être calculé et la taille des cœurs des vortex reste ainsi inconnue. Les techniques développées pour résoudre ce problème sont expliquées en détail dans le chapitre 4.

### 2.2.3 Comparaison entre les visualisations au colorant et les champs de vorticité

Dans ce paragraphe, nous expliquons pourquoi le colorant est un bon marqueur de la vorticité pour les écoulements bidimensionnels. C'est un problème classique mais souvent discuté, qui nécessite dans notre cas une petite étude. La vorticité qui se trouve au cœur des tourbillons, est créée au départ dans la couche limite qui apparaît le long de la pale. En effet, lors de la rotation de la pale, le fluide est mis en mouvement autour de la pale, créant un écoulement parallèle à la face de la pale. La viscosité crée aussitôt une couche limite de vorticité, qui est partiellement entraînée par le fluide. Cette couche de vorticité se décroche de la pale lorsqu'elle arrive à la pointe, créant ainsi une nappe de vorticité. L'évolution de cette nappe de vorticité est encore mal comprise à l'heure actuelle. Des calculs théoriques (voir par exemple Saffman 1992) montrent que dans le cas d'une plaque semi-infinie, d'épaisseur nulle, impulsivement mise en translation à vitesse constante, la nappe s'enroule en spirale (Kaden 1931), créant un tourbillon dont la vitesse azimutale moyenne varie comme  $r^{-1/2}$ ,  $r$  étant la distance au centre du vortex. Cependant, dans notre cas, nous avons fait décroître la vitesse de la pale de manière à ce que le tourbillon soit plus proche d'un tourbillon Gaussien. Nous reviendrons sur le profil du tourbillon dans la section 2.3.

Le colorant, quant à lui est initialement déposé le long de la pale, à l'endroit où la couche de vorticité est créée. Par diffusion, il se trouve donc lui aussi entraîné par le fluide le long de la pale et décroche au niveau de la pointe. Le colorant et la vorticité sont ainsi placés au même endroit au début de l'enroulement de la nappe. Ils sont ensuite advectés par le fluide, et suivent donc la même évolution dans la suite de l'expérience. En effet, la vorticité  $\omega$  et la concentration en colorant  $c$  sont régies par des équations semblables dans le cas bidimensionnel<sup>1</sup> :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \kappa \Delta c \quad (2.3)$$

La seule différence entre les deux équations d'évolution vient du terme de diffusion. Le rapport entre la diffusivité de la vorticité  $\nu$  et la diffusivité du

1. le terme d'étirement de la vorticité  $\omega \cdot \nabla \mathbf{v}$  est nul en 2 dimensions

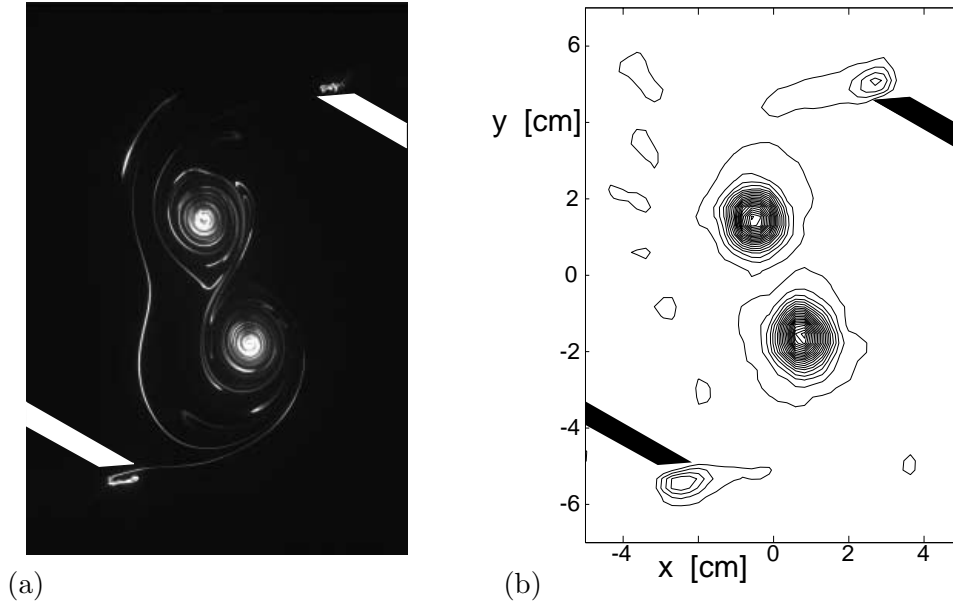


FIG. 2.10 – *Comparaison du colorant et de la vorticité pour deux expériences identiques, après enroulement des nappes de vorticité:  $t = 6.7$  s ( $t^* = 0.5$ ). La différence entre deux niveaux de vorticité est  $\Delta\omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$  et le nombre de Reynolds vaut 1506.*

colorant  $\kappa$  est effectivement très élevé dans l'eau, puisqu'il correspond au nombre de Schmidt  $S = \nu/\kappa$ , qui est de l'ordre de 2000 pour la Fluorescéine dans l'eau. Nous pouvons en conclure que tant que les temps de diffusion sont négligeables devant les temps de l'expérience, la vorticité est bien marquée par le colorant car il a été injecté au même endroit.

Au cœur des tourbillons, la distance entre deux cercles de la spirale de colorant est très faible ( $e < 1$  mm). Le temps de diffusion associé ( $e^2/\nu \sim 1$  s) est très petit devant le temps convectif de l'expérience, représenté par la période de rotation de la paire ( $t_c \sim 10$  s). Au cœur du vortex, la nappe de vorticité diffuse donc rapidement en une distribution continue et axisymétrique de vorticité. Par contre, le colorant n'a pas le temps de diffuser, car le temps de diffusion de la concentration de colorant ( $e^2/\kappa$ ) est de l'ordre de 1000 s. La spirale de colorant est donc très proche des contours d'isovorticité, qui sont des cercles concentriques du fait de l'axisymétrie du tourbillon. Avant la fusion des tourbillons, on peut donc assimiler la ligne de colorant aux contours de vorticité. Cette ressemblance est bien mise en évidence dans la figure 2.10, dans laquelle les contours de vorticité correspondent presque exactement aux lignes quasi-circulaires de colorant. A l'extérieur du cœur des vortex, la spirale de vorticité est encore visible et se situe exactement à l'endroit où la spirale de colorant se décroche de la pointe des pales. Cela est en accord avec le mécanisme de création des tourbillons. Finalement, cette correspondance est fortuite, car elle provient de l'axisymétrie des lignes de courant et non des Eqs. (2.2, 2.3). Mais elle est très utile, car les visualisations au colorant donnent une compréhension intuitive et rapide de l'écoulement bidimensionnel.

Lors de la fusion des deux vortex (ce phénomène est décrit en détail dans

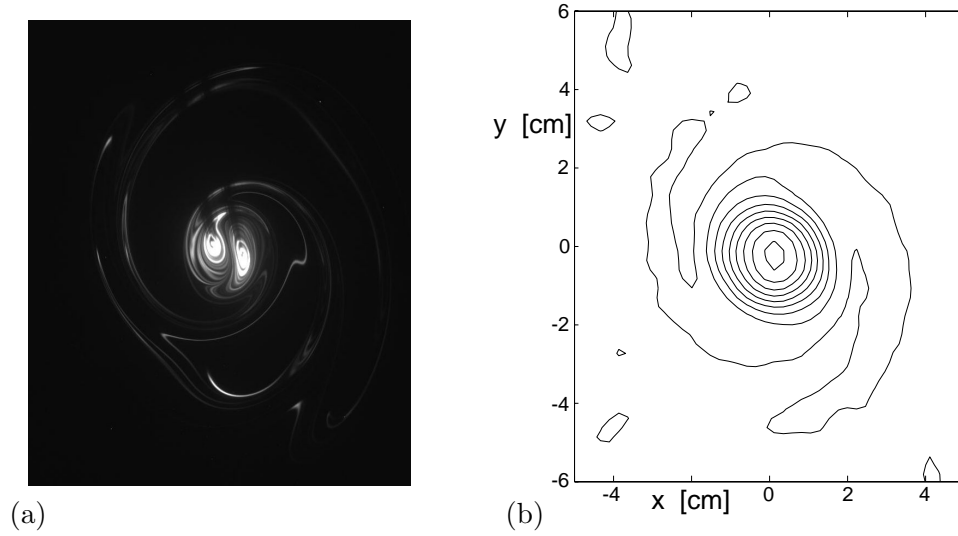


FIG. 2.11 – *Comparaison du colorant et de la vorticité pour deux expériences identiques, après fusion :  $t = 21.7$  s ( $t^* = 1.5$ ). La différence entre deux niveaux de vorticité est  $\Delta\omega = 0.5$  s $^{-1}$  et le nombre de Reynolds vaut 1506.*

le chapitre 4), les évolutions sont régies par des mécanismes convectifs, et la diffusion joue un rôle très faible. Les contours de vorticité et les lignes de colorant sont simplement advectés par le fluide, et le colorant reste un très bon marqueur de la vorticité. Les visualisations sont donc un excellent moyen de comprendre les mécanismes qui régissent la fusion. Néanmoins, après la fusion, le vortex final est de nouveau sujet à de la diffusion visqueuse. C'est pourquoi les deux lobes de vorticité (issus des deux vortex initiaux), qui sont séparés par une bande de vorticité faible juste après la fusion, vont diffuser progressivement pour combler cette bande, et ne former qu'une unique distribution de vorticité. Le colorant au contraire n'a pas le temps de diffuser sur cette échelle, et les lignes de colorant n'ont plus du tout la forme que possèdent les contours de vorticité, ainsi que le montre la figure 2.11. En effet, on observe sur les visualisations une structure ressemblant au symbole Chinois du Yin et du Yang, alors que la distribution de vorticité est presque axisymétrique au cœur du tourbillon dans les instants finaux. Ainsi, la visualisation au colorant est traître car elle ne représente plus les contours de vorticité. Les mesures quantitatives étaient donc nécessaires, pour pouvoir caractériser véritablement l'état final de l'écoulement.

### 2.3 Traitement des données

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment nous avons déduit les paramètres de l'écoulement des champs de vitesse obtenus par PIV. Nous analysons ensuite l'erreur commise sur chacun de ces paramètres.



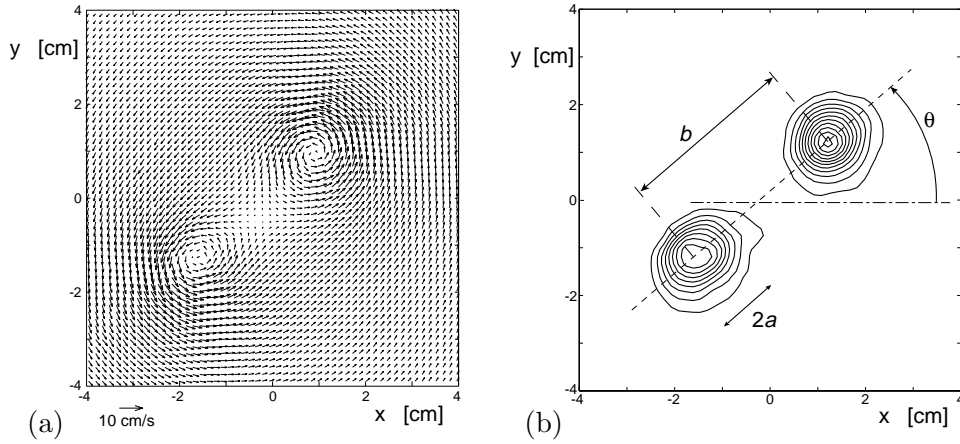


FIG. 2.12 – (a) Champ de vitesse et (b) contours de vorticité obtenus pour une paire de tourbillons avant la fusion, pour un nombre de Reynolds égal à 3600. Le rapport  $a/b$  entre la taille du cœur et la distance de séparation vaut 0.17. La différence entre deux contours de vorticité vaut  $2 \text{ s}^{-1}$ .

### 2.3.1 Paramètres de l'écoulement

L'écoulement créé par les deux pales est constitué de deux tourbillons tournant dans le sens trigonométrique. Leur champ de vitesse et de vorticité sont représentés sur la figure 2.12. Par induction mutuelle, la paire tourne sur elle-même dans le sens trigonométrique avec une vitesse angulaire proche de celle de deux tourbillons ponctuels, donnée dans l'équation (1.1). L'angle  $\theta$  de la paire, défini dans la figure 2.12(b), augmente donc avec le temps. Nous allons utiliser cette vitesse de rotation pour adimensionner le temps dans l'expérience, qui démarre au début de la rotation des pales. Nous utilisons la période de rotation de la paire  $t_c$  comme échelle de temps, ce qui revient à utiliser un temps adimensionné défini par :

$$t^* = t/t_c \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{2\pi^2 b_0^2}{\Gamma} \quad (2.4)$$

Lorsque cela est précisé, nous utilisons un temps dont l'origine a été translatée, afin d'avoir une relation simple entre le temps et la taille des cœurs : l'origine des temps est prise là où la taille des cœurs tend vers 0 par extrapolation de la croissance visqueuse.

Il est à noter que la circulation  $\Gamma$  et la taille des cœurs  $a$  de chaque tourbillon ne peuvent être obtenues qu'à partir des mesures quantitatives par PIV. Ces grandeurs ne peuvent pas être issues des visualisations au colorant, sauf en supposant que la paire de tourbillons non ponctuels tourne sur elle-même comme une paire de tourbillons ponctuels. Cela sera vérifié expérimentalement dans le chapitre 4.

Nous venons de parler de la taille du cœur  $a$  d'un tourbillon, qui caractérise l'extension spatiale de chaque vortex. Pour définir proprement la taille du cœur, il est nécessaire de connaître la forme du profil de vitesse de chaque tourbillon. Nous avons observé que l'écoulement créé par les deux pales est très proche du champ de vitesse de deux tourbillons Gaussiens,

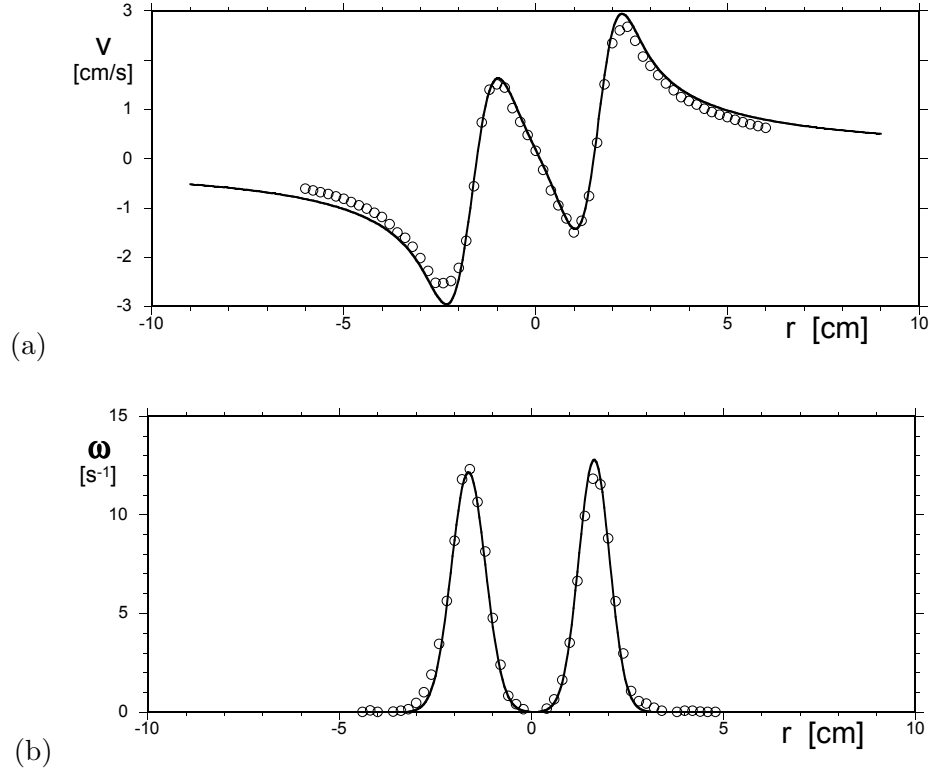


FIG. 2.13 – (a) Vitesse transverse et (b) vorticité axiale sur la ligne joignant les centres des deux vortex pour le champ de vorticité de la figure 2.10. Les lignes continues correspondent aux prédictions théoriques faites à partir de deux vortex Gaussiens, définis par l'équation (2.5), possédant la même circulation ( $\Gamma_1 = 15 \text{ cm}^2/\text{s}$  et  $\Gamma_2 = 13 \text{ cm}^2/\text{s}$ ), la même taille de cœur ( $a_1 = 0.62 \text{ cm}$  et  $a_2 = 0.57 \text{ cm}$ ) et la même distance de séparation ( $b = 3.3 \text{ cm}$ )

aussi appelés vortex de Lamb-Oseen. Le vortex de Lamb-Oseen est un tourbillon axisymétrique, défini en coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  par une distribution Gaussienne de la vorticité axiale :

$$\omega_z(r) = \frac{\Gamma}{\pi a^2} e^{-r^2/a^2} \quad v_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/a^2}\right) \quad (2.5)$$

La figure 2.13 montre les profils de vitesse et de vorticité trouvés expérimentalement sur une ligne joignant les deux vortex. Cette figure prouve que l'écoulement est effectivement très proche de la superposition de deux tourbillons Gaussiens, puisque les mesures se trouvent presque exactement sur les courbes théoriques.

### 2.3.2 Mesure de la distance de séparation $b$

Nous avons calculé la distance de séparation  $b$  entre les deux vortex, en traitant les champs de vitesse obtenus par PIV, en utilisant deux méthodes différentes. La première méthode est globale, car elle utilise une approximation du champ de vitesse par deux tourbillons Gaussiens. La deuxième méthode est locale car elle recherche des maxima locaux de vorticité.

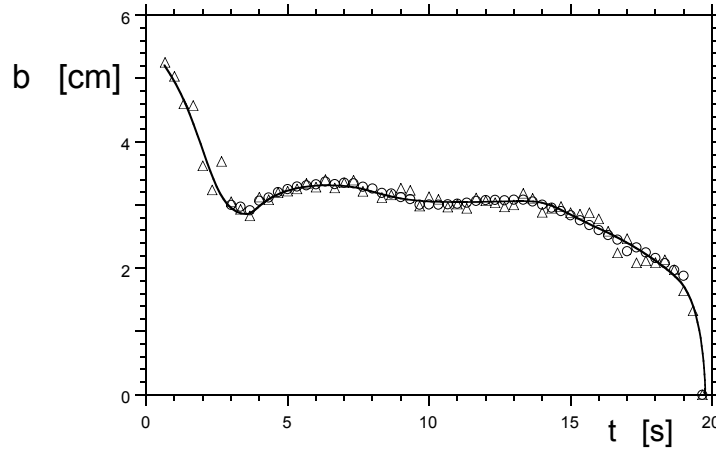


FIG. 2.14 – Distance de séparation entre les deux vortex avant la fusion. Les triangles correspondent au résultat obtenu en prenant la distance entre les deux maxima de vorticité. Les cercles sont obtenus en fittant le champ de vitesse par deux tourbillons Gaussiens. Le nombre de Reynolds vaut 1506.

**Fit du champ de vitesse :** Nous avons vu que le champ de vitesse dans la figure 2.13 est très proche du champ créé par deux tourbillons Gaussiens. Nous avons approximé le champ de vitesse expérimental par un champ théorique constitué de deux tourbillons Gaussiens. Les tourbillons expérimentaux sont caractérisés par leurs circulations  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , leurs tailles de cœur  $a_1$  et  $a_2$ , et leurs positions  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . En appelant  $(\mathbf{u}_{\text{fit}})$  le champ de vitesse défini par ces huit paramètres, on peut définir une distance entre le champ de vitesse expérimental  $\mathbf{u}$  et le champ de vitesse fitté :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{\text{fit}}) = [(u - u_{\text{fit}})^2 + (v - v_{\text{fit}})^2]^{1/2} \quad (2.6)$$

En utilisant des procédures Matlab, il est alors très facile d'optimiser les paramètres du champ fitté afin de minimiser cette distance. On obtient ainsi tous les renseignements concernant les vortex :  $a$ ,  $\Gamma$ , et  $b$ . La distance de séparation  $b$ , calculée par cette méthode, est tracée dans la figure 2.14, représentée par les symboles circulaires. Le bruit de mesure est très faible, car le fit utilise tout le champ de vitesse, ce qui moyenne les erreurs de chaque vecteur. Par contre, cette méthode n'est valable que lorsque les deux vortex sont suffisamment éloignés : il n'est pas possible d'avoir des mesures par un fit pendant la période de la fusion. C'est pourquoi nous avons aussi utilisé une autre méthode.

**Recherche de maxima de vorticité :** Le champ de vorticité est obtenu par différences finies, à partir du champ de vitesse instantané. La vorticité en chaque point de la grille est calculé à partir de la vitesse sur les huit points voisins. Le champ de vorticité est ensuite lissé en moyennant la vorticité sur neuf points voisins. Ce lissage peut modifier la valeur de la vorticité maximale, mais il augmente la précision sur la position de ce maximum, qui est alors inférieure au pas de la grille, c'est-à-dire de l'ordre de 1.5 mm. La

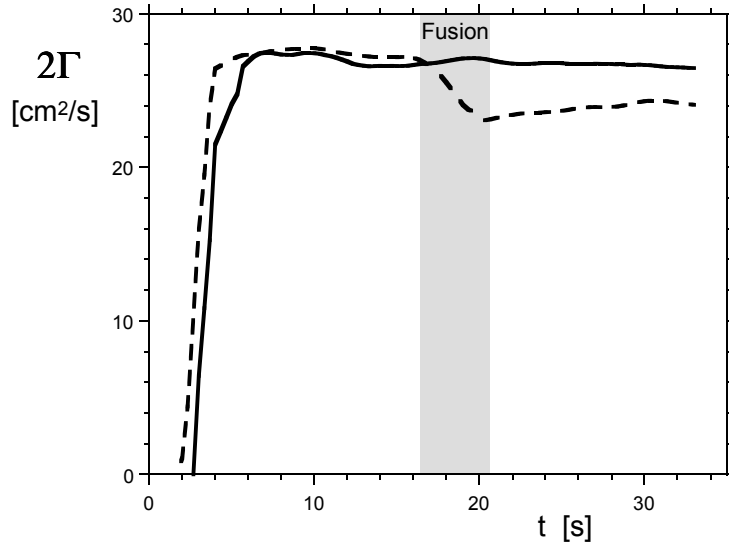


FIG. 2.15 – Circulation totale de l'écoulement en fonction du temps, obtenue par intégration de la vitesse sur un contour (trait plein), et par un fit du champ de vitesse avec deux tourbillons (et un unique tourbillon après fusion) Gaussiens (traits pointillés). Le nombre de Reynolds vaut 1506.

distance entre les deux maxima de vorticité correspond à la distance entre les cœurs des deux vortex.

Il est à noter que l'influence d'un vortex sur le vortex opposé est négligeable puisque les distributions sont Gaussiennes. En effet, même pour un rapport  $a/b$  aussi élevé que 0.25, la vorticité propre d'un vortex est plus grande que la vorticité du vortex opposé de sept ordres de grandeur. Cette technique de recherche de la distance de séparation est donc très efficace, même pendant la fusion des deux vortex. Les résultats sont tracés par des triangles sur la figure 2.14. Il est possible de mesurer la distance, même lorsqu'elle a diminué de moitié. De plus, pendant la formation des vortex, c'est-à-dire pour  $t < 2$  s, les maxima de vorticité sont identifiables très tôt, bien avant que la méthode du fit ne donne des résultats. Cette méthode de mesure de  $b$  est donc très agréable, car elle est valable sur une période de temps très grande. De plus, la concordance avec la technique de fit est très bonne. Néanmoins, le bruit est un peu plus grand en utilisant cette technique, puisque c'est une méthode locale qui ne moyenne pas les mesures de tout le champ de vitesse.

En conclusion, la distance de séparation  $b$  est mesurée de manière très précise, avec une erreur relative d'environ 2%. Les incertitudes sur la distance de séparation moyenne viennent plus de la variation de  $b$  avec le temps : la distance  $b$  oscille légèrement autour de sa position moyenne dans la figure 2.14. Ceci est lié au fait que le mouvement des deux tourbillons n'est pas exactement circulaire, à cause de la présence des pales (voir le paragraphe 2.1.3).

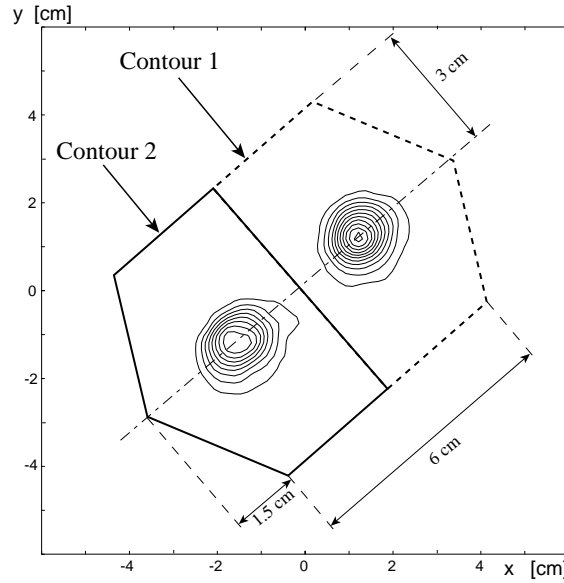


FIG. 2.16 – Schéma explicatif des deux zones (en trait plein et en traits pointillés) sur lesquelles sont calculées les circulations des deux vortex.

### 2.3.3 Calcul de la circulation des vortex $\Gamma$

La circulation de chaque vortex est obtenue par la méthode du fit du champ de vitesse, décrite dans le paragraphe précédent. La somme de la circulation des deux tourbillons, obtenue par cette technique, est tracée dans la figure 2.15 par une ligne discontinue. Après la fusion, le champ de vitesse est fitté par un unique tourbillon Gaussien, défini par 4 paramètres : sa position  $(x, y)$ , sa circulation  $\Gamma$ , et sa taille  $a$ .

Cependant, il est plus efficace de calculer directement la circulation globale en intégrant la vitesse sur un contour qui englobe les deux tourbillons. Cette méthode est très efficace, car elle utilise le champ de vitesse dans les régions qui sont en dehors des cœurs des vortex, c'est-à-dire là où l'algorithme de PIV est très précis. Avant la fusion, la circulation totale est obtenue sur le contour périphérique des contours 1 et 2 décrits dans la figure 2.16. Après la fusion, la circulation totale des deux tourbillons est obtenue en utilisant un contour hexagonal, de rayon 5 cm. La circulation totale, obtenue par cette méthode, est tracée dans la figure 2.15 par la ligne continue. La concordance entre les deux méthodes de mesure de la circulation est très bonne avant la fusion. Cependant, après la fusion il y a une différence de 10 %, qui vient du fait que le vortex final n'est pas exactement Gaussien. La méthode du fit n'est donc plus adaptée. Nous reviendrons sur cet aspect dans le paragraphe suivant et dans le chapitre 4. C'est pourquoi nous avons finalement calculé la circulation directement sur des contours car cela représente exactement la circulation totale de l'écoulement. La figure 2.15 indique qu'elle est conservée, ce qui est conforme, puisqu'aucune vorticité ne sort du domaine de mesure. La circulation moyenne est donc extrêmement bien définie, et son incertitude est de l'ordre de 1%.

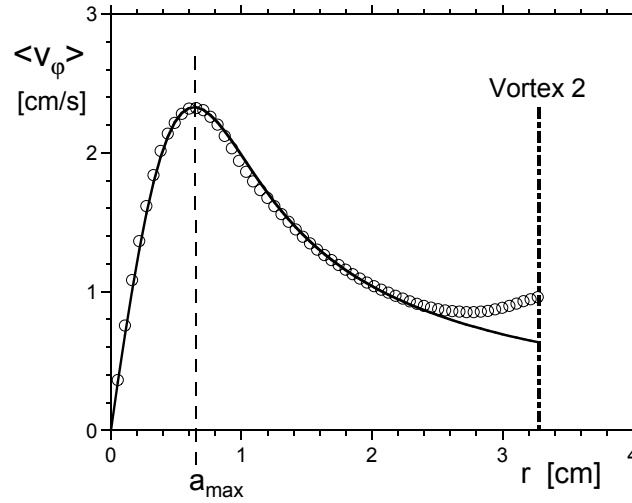


FIG. 2.17 – Vitesse azimutale moyenne autour d'un vortex, correspondant au champ de vorticité de la figure 2.10. La ligne continue correspond au profil de vitesse d'un tourbillon Gaussien défini par l'équation 2.5, possédant la même circulation ( $\Gamma = 13 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ), la même taille de cœur ( $a = 0.57 \text{ cm}$ ) et le même rapport  $a/b = 0.18$ . Le nombre de Reynolds vaut 1506.

Pour connaître la dissymétrie des tourbillons, il faut calculer la circulation de chaque tourbillon. Nous avons utilisé un contour pour chaque tourbillon. Ces contours sont explicités dans la figure 2.16. On peut alors en déduire le rapport  $\Gamma_1/\Gamma_2$  entre les deux circulations.

### 2.3.4 Détermination de la taille du cœur $a$

La méthode de fit du champ de vitesse donne la taille du cœur si les tourbillons sont Gaussiens. Malheureusement, le tourbillon final après fusion n'est pas Gaussien. En effet, nous verrons dans le chapitre 4 qu'il est difficile de trouver une bonne approximation Gaussienne du profil de vorticité, car il possède des ailes qui ont une vorticité trop importante (voir la figure 4.18). Ces ailes correspondent aux spirales de vorticité, visibles dans le champ de vorticité de la figure 2.11(b). Il faut donc trouver une mesure de la taille du cœur qui soit indépendante du profil.

Le profil de la vitesse azimutale moyenne est tracé dans la figure 2.17. L'incertitude est très faible, car la vitesse est moyennée sur des cercles centrés sur le cœur du vortex. Il est possible de localiser très précisément le rayon  $r = a_{\max}$  pour lequel la vitesse azimutale est maximale. Dans le cas d'un tourbillon Gaussien, la vitesse est maximale en  $r = 1.12a$ , où  $a$  est le paramètre de la Gaussienne dans la formule (2.5). Nous avons donc défini la taille du cœur par :

$$a = a_{\max}/1.12 \quad (2.7)$$

avec  $a_{\max}$  mesuré sur le profil de vitesse azimutale moyenne. Avec une telle définition, la taille du cœur  $a$  correspond au paramètre défini dans la formule (2.5), si les tourbillons observés sont effectivement Gaussiens. La fi-

figure 2.17 montre que la vitesse azimutale mesurée expérimentalement est très proche du profil d'un tourbillon Gaussien, quand on regarde les tourbillons avant fusion. Avant la fusion, les résultats obtenus par cette méthode sont en accord avec les résultats obtenus par la méthode du fit. Par contre, après la fusion, il y a une légère différence, de l'ordre de 5%.

Il est à noter que pour les expériences à haut nombre de Reynolds, le profil de vitesse est moins proche d'une Gaussienne (voir figure 5.4). La vitesse azimutale décroît moins vite avec  $r$ , indiquant que la vorticité décroît moins vite qu'une Gaussienne, même avant la fusion. La taille effective du cœur, à prendre en compte pour une comparaison avec les résultats théoriques, pourrait donc être légèrement plus grande que celle calculée à partir de  $a_{\max}$  pour les résultats à haut nombre de Reynolds.

**Influence du vortex opposé sur la détermination de la taille du cœur :** Nous allons analyser comment la mesure de la taille du cœur  $a_{\max}$  est influencée par la présence du vortex opposé. Pour cela, il faut calculer la vitesse azimutale moyenne, sur un cercle de rayon  $r$  autour du vortex 1:

$$\langle v_\varphi \rangle(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2\pi r} \iint \omega dS = \frac{\Gamma_1}{2\pi} f(r) + \frac{C_2(r)}{2\pi r} \quad (2.8)$$

Dans cette formule,  $\Gamma_1$  est la circulation totale du vortex 1, la fonction  $f$  est définie par  $f(r) = (1 - e^{-r^2})/r$ , et  $C_2(r)$  est la circulation de la vorticité du vortex 2 sur le cercle de rayon  $r$ . Nous avons ici adimensionné les distances par la taille du vortex 1, en prenant  $a_1 = 1$ . Lorsque  $C_2$  est nulle, c'est-à-dire quand les vortex sont infiniment éloignés, la vitesse azimutale moyenne est maximale lorsque la fonction  $f(r)$  est maximale, c'est-à-dire en  $r = r_0 \simeq 1.12$ . L'effet de la fonction  $C_2$  est visible dans la figure 2.17, et correspond à la hausse de  $v_\varphi$  lorsque  $r$  se rapproche du vortex 2. Lorsque  $C_2$  est non nulle,  $\langle v_\varphi \rangle$  est maximale en  $r = a_{\max}$ , défini par  $\langle v_\varphi \rangle'(r) = 0$ . En introduisant la forme explicite de  $v_\varphi$  donnée dans (2.8), on obtient la condition :

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} f'(r) = -\frac{d}{dr} \left( \frac{C_2(r)}{2\pi r} \right) \quad \text{pour } r = a_{\max} \quad (2.9)$$

En utilisant un développement limité de  $f'$  autour de  $r_0$ , on simplifie cette équation :

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} (a_{\max} - r_0) f''(r_0) = -\frac{d}{dr} \left( \frac{C_2(r)}{2\pi r} \right)_{(r=a_{\max})} \quad (2.10)$$

Le terme  $a_{\max} - r_0$  correspond à l'erreur  $\varepsilon$  faite sur la mesure de la taille du cœur par cette méthode, en présence du vortex opposé. Pour avoir une majoration de l'erreur faite sur  $\varepsilon$ , il suffit donc de majorer la valeur absolue du terme de droite.

$$\left| -\left( \frac{C_2'(r)}{2\pi r} \right) + \left( \frac{C_2(r)}{2\pi r^2} \right) \right| < \left| \frac{\int_r^{r+dr} \omega_2 dS}{2\pi r dr} \right| + \left| \frac{\int_0^r \omega_2 dS}{2\pi r^2} \right| < \frac{3}{2} \omega_{\max} \quad (2.11)$$

Dans cette formule,  $\omega_{\max}$  correspond au maximum de la vorticité  $\omega_2$  du vortex 2, sur le cercle de rayon  $r = a_{\max}$ , et vaut  $\Gamma_2 \exp[-(b - a_{\max})^2/a_2^2]/\pi a_2^2$ .

La deuxième majoration est très large, car la vorticité décroît exponentiellement, et est donc beaucoup plus faible que  $\omega_{\max}$  sur la quasi-totalité du cercle. En combinant l'équation (2.10) et (2.11), on obtient une majoration de l'erreur relative faite sur la taille du cœur du vortex 1 :

$$\frac{\varepsilon}{a_1} < 3.9 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 e^{-\left( \frac{b-1.12a_1}{a_2} \right)^2}. \quad (2.12)$$

Dans le cas symétrique et pour un rapport  $a/b = 0.25$ , l'erreur relative vaut 0.1%, ce qui est négligeable devant les erreurs liées au bruit de mesure. Cependant, pour un rapport  $a/b = 0.3$ , l'erreur relative devient plus importante, de l'ordre de 3%. La taille des cœurs n'est donc pas mesurable pendant la phase de la fusion, qui démarre pour un rapport  $a/b$  de l'ordre de 0.25.

**Effet d'une mauvaise localisation du centre du vortex :** Nous allons maintenant calculer l'erreur engendrée par une mauvaise localisation du centre du vortex, qui peut survenir lorsque le maximum de vorticité mesuré est légèrement décalé par rapport au vrai centre du vortex. Nous ne considérons ici qu'un seul vortex. Supposons que le vortex soit centré en  $O$ , mais que l'algorithme d'analyse du champ de vitesse l'a localisé en  $O'$ ,    une distance  $\Delta$  du centre  $O$ . La procédure automatique calcule la vitesse azimutale moyenne, sur des cercles centrés en  $O'$  :

$$\langle v_\varphi \rangle(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{\mathcal{C}(O')} \omega(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{2\pi r} \iint_{\mathcal{C}(O)} \omega(\mathbf{r} + \overrightarrow{OO'}) dS \quad (2.13)$$

où  $\mathcal{C}(O)$  (resp.  $\mathcal{C}(O')$ ) signifie le cercle de centre  $O$  (resp.  $O'$ ). Par un développement limité de  $\omega(\mathbf{r} + \overrightarrow{OO'})$  au deuxième ordre en  $\overrightarrow{OO'}$  (le premier ordre s'annule lors de l'intégration), on trouve :

$$\langle v_\varphi \rangle(r) = \frac{\Gamma}{2\pi a} \left[ \left( 1 - 2 \left( \frac{\Delta}{a} \right)^2 \right) f(r/a) - \left( \frac{\Delta}{a} \right)^2 g(r/a) \right] \quad (2.14)$$

Dans cette formule,  $f(r) = (1 - e^{-r^2})/r$  est la fonction précédemment définie, et  $g(r) = re^{-r^2}$  correspond au terme de décentrage. La taille du cœur est obtenue en  $r = a_{\max}$  lorsque la vitesse est maximale. En dérivant l'équation (2.14) et en faisant comme précédemment un développement limité de la fonction  $f$  autour du point  $r_0 = 1.12$ , on trouve une erreur relative :

$$\frac{\varepsilon}{a} = \frac{g'(r_0)}{f''(r_0)} \left( \frac{\Delta}{a} \right)^2 = 0.56 \left( \frac{\Delta}{a} \right)^2 \quad (2.15)$$

La variation de la taille du cœur  $a_{\max}$  pour un vortex décentré d'une distance  $\Delta$  est tracée dans la figure 2.18. La formule précédente est comparée aux résultats de simulations numériques. Dans ces simulations numériques, on rentre le champ de vitesse d'un vortex Gaussien, décentré d'une distance  $\Delta$  par rapport à l'origine, sur une grille d'un pas  $p = a/4$  ou  $p = a/10$ . La procédure utilisée dans les expériences, calcule alors le profil de vitesse sur des cercles centrés autour de l'origine, et en déduit une valeur



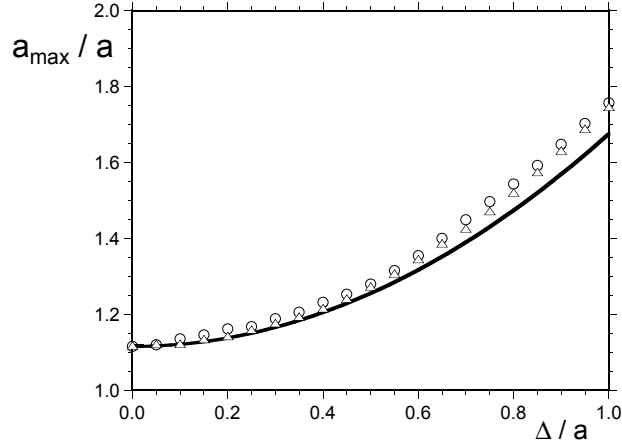


FIG. 2.18 – Taille du cœur  $a_{\max}$  pour laquelle la vitesse azimutale est maximale, calculée pour un vortex Gaussien (2.5), décentré d'une distance  $\Delta$ . La ligne continue correspond au résultat théorique de l'équation (2.15). Les symboles correspondent à une validation numérique faite à l'aide d'une grille dont le pas vaut  $a/4$  ( $\circ$ ) comme dans les expériences, et  $a/10$  ( $\Delta$ ).

de  $a_{\max}$ . La correspondance entre les simulations numériques et la formule théorique (2.15) est bonne. De plus, cette figure montre que l'effet de la grille est négligeable si le pas de la grille est inférieur à  $a/4$ .

Expérimentalement, nous avons observé que le maximum de vorticité n'est jamais plus éloigné du centre du vortex que de un pas de la grille. Le décentrage  $\Delta$  maximum est donc environ égal au pas de la grille. Dans les conditions expérimentales classiques, la taille du cœur au début de l'expérience vaut environ 6 mm, et le pas du réseau vaut environ 1.5 mm. L'erreur sur la taille du cœur, calculée par la formule (2.15), est donc inférieure à 3.5%. Si l'on moyenne l'erreur en faisant varier le décentrage à l'intérieur du carré construit par les plus proches voisins de la grille, on obtient une erreur systématique de 2% :  $\varepsilon_{\text{biais}} = 0.56(2/3)(p/a)^2$ , où  $p$  est le pas de la grille.

Cette erreur devrait être prise en compte dans les résultats, mais elle est en fait plus petite que l'incertitude, liée au bruit de mesure dans le champ de vitesse. En effet, on peut voir sur les figures 4.4 et 4.7 qui montrent la taille du cœur en fonction du temps, que le bruit de mesure est relativement important. Cette incertitude est liée aux erreurs de mesure dans le champ de vitesse, qui créent du bruit dans le profil azimutal  $\langle v_\varphi \rangle$ , ce qui entraîne une mauvaise détermination de  $a_{\max}$ . L'incertitude sur la taille du cœur est de l'ordre de 5%.

En conclusion, l'erreur provient essentiellement du bruit dans le champ de vitesse et non de la localisation du maximum de vorticité ou de l'influence du tourbillon opposé. L'incertitude est de l'ordre de 5%. De tous les paramètres ( $\Gamma$ ,  $a$ ,  $b$ ), c'est la grandeur expérimentale qui possède le plus de bruit.

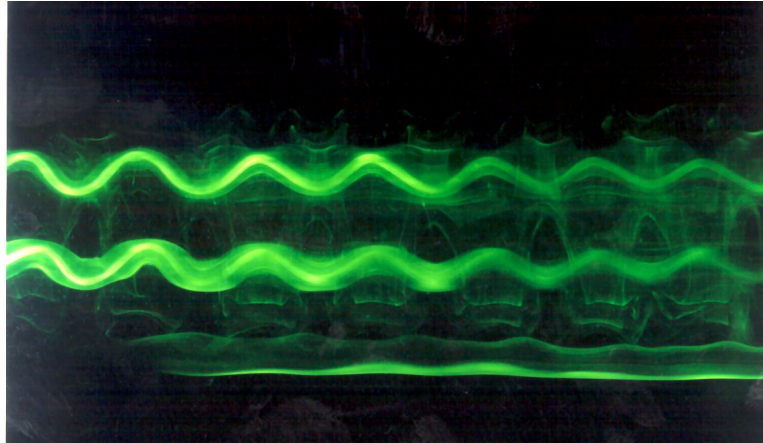


FIG. 2.19 – Exemple de visualisation de l'instabilité tridimensionnelle obtenue sur une paire de tourbillons corotatifs.

### 2.3.5 Mesure de la longueur d'onde de l'instabilité

Nous verrons dans le chapitre 5 qu'il apparaît une instabilité tridimensionnelle aux nombres de Reynolds élevés. Elle se manifeste sous la forme d'une ondulation des cœurs des vortex, ainsi que le montre la visualisation de la figure 2.19. Nous avons obtenu une mesure simultanée de la longueur d'onde, de l'amplitude et du champ de vitesse, en utilisant deux caméras simultanément. Pour cela, nous avons marqué les tourbillons avec du colorant et nous avons inséré des particules dans le fluide pour la PIV. Une mesure simultanée des trois grandeurs est nécessaire car l'écoulement est instationnaire et le phénomène de l'instabilité est peu reproductible. La longueur d'onde est mesurée directement sur les visualisations en vue de côté semblables à celles de la photo de la figure 2.19. L'imprécision des mesures vient de l'irrégularité de l'ondulation, lorsque les paramètres de l'écoulement sont à la limite du domaine où apparaît l'instabilité. L'erreur reste cependant très faible, de l'ordre de 2%.

### 2.3.6 Taux de croissance de l'instabilité

En illuminant l'instabilité par deux tranches laser passant par le maximum et le minimum de l'ondulation (voir la figure 5.16), il est possible de mesurer précisément l'amplitude de l'ondulation en fonction du temps. Une approximation exponentielle de l'évolution temporelle de cette amplitude conduit à une valeur expérimentale du taux de croissance de l'instabilité.

Il est cependant difficile de savoir si le taux de croissance mesuré sur des visualisations au colorant correspond effectivement au taux de croissance du mode de l'instabilité. En effet, l'amplitude de l'ondulation sature aux fortes amplitudes du mode, à cause de la forme de la perturbation, qui est proche de celle donnée théoriquement par les équations (5.11–5.13). Nous avons donc effectué des simulations numériques en plaçant un point de colorant dans un écoulement constitué de la superposition d'un vortex Gaussien (2.5) et de la perturbation tridimensionnelle donnée par (5.11–5.13), qui croît en

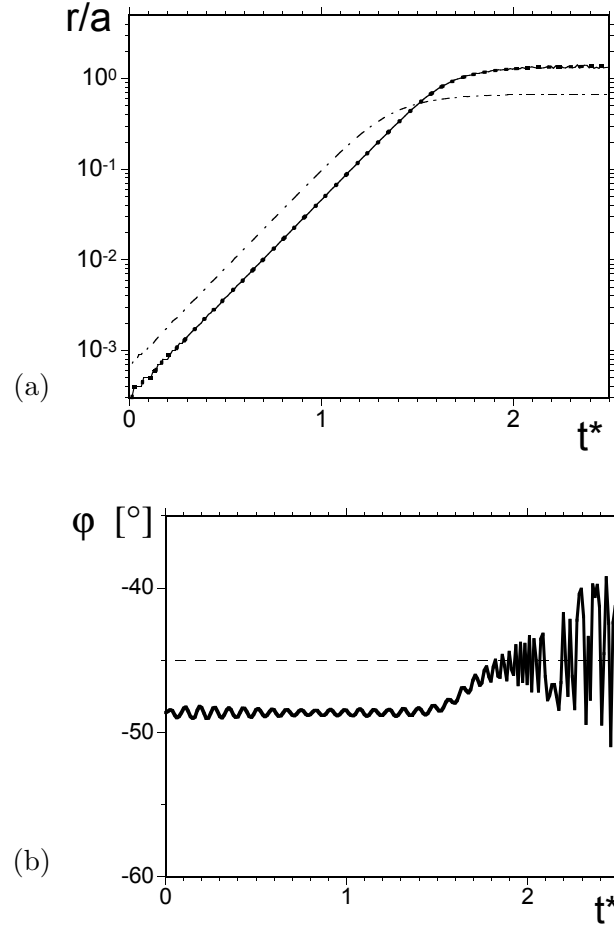


FIG. 2.20 – Simulation numérique de la trajectoire d'un point de colorant dans la superposition d'un vortex Gaussien et d'une perturbation tridimensionnelle. Le point de colorant, représenté par la ligne continue, est initialement placé au centre du vortex Gaussien. (a) Distance entre le centre du vortex et le point de colorant. (b) Angle avec l'axe ( $Ox$ ) joignant les deux vortex. La ligne discontinue représente le centre de rotation de l'écoulement total et les traits mixtes correspondent au maximum de vorticité.

fonction du temps. Nous avons résolu l'équation différentielle  $(\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = (v_r, v_\varphi/r, v_z)$ , avec les conditions initiales  $r = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varphi = -48.6^\circ$  and  $z = 0$ . Ces conditions initiales ne changent pas la trajectoire finale, mais minimisent simplement les oscillations qui apparaissent dans la première phase, où la trajectoire s'adapte à l'équation différentielle. Sur cette trajectoire,  $r(t)$  est égal à la moitié de l'amplitude de l'ondulation  $A(t)/2$ , car on se place à  $z = 0$ , c'est-à-dire à l'endroit où l'amplitude est maximale.

Pour être aussi près que possible de la configuration expérimentale, nous avons pris  $a/b = 0.2$ ,  $\lambda/a = 4$  et  $\sigma^* = 5$ , ce qui fixe les constantes des équations (5.11–5.13), si l'on prend les échelles de temps et de longueur en supposant  $a = 1$  et  $\Gamma = 1$ . Cela conduit à prendre les valeurs :  $k = \pi/2$  et  $\xi = 60^\circ$ . Le taux de croissance est  $\sigma = \sigma^*/t_c = 1/10\pi^2$  et le temps adimensionné est donné par  $t^* = t/t_c = 2t/100\pi^2$ . Nous avons choisi  $C = 10^{-4}$  pour que l'amplitude soit suffisamment petite au début de la simulation

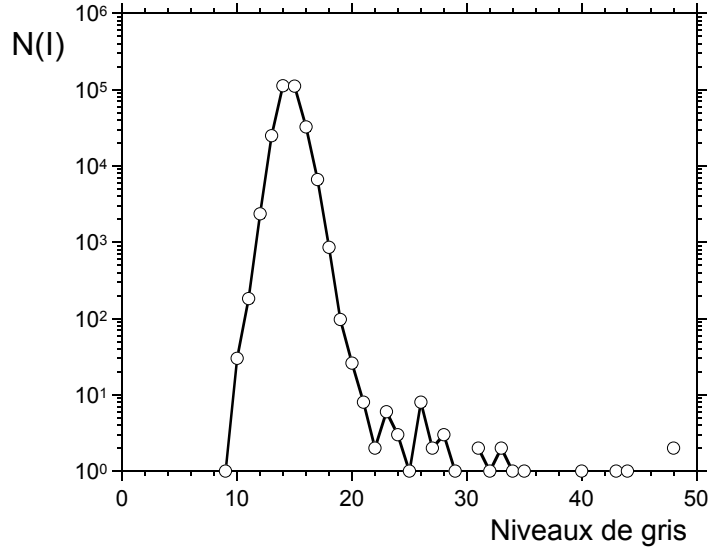


FIG. 2.21 – Histogramme de l'intensité lumineuse en niveaux de gris, obtenu pour le fond, c'est-à-dire dans une zone sans colorant.

Les résultats sont présentés sur la figure 2.20. La ligne en traits mixtes représente la position du maximum de vorticité de l'écoulement instantané. Ce n'est pas équivalent à la position du colorant, qui suit le centre de rotation de l'écoulement instantané. En fait, le colorant et le centre de rotation ne sont pas exactement au même emplacement, car le colorant possède un angle moyen  $\varphi \sim -49^\circ$ , alors que le centre de rotation se trouve en  $\varphi = -45^\circ$ .

Lorsque l'amplitude du mode est grande, la position du colorant  $r(t)$  sature. Le taux de croissance de  $A(t)$  est donc égale au taux de croissance de l'instabilité uniquement lorsque  $r/a < 1$ , ce qui donne  $A < 1.2$  cm, car  $a$  est de l'ordre de 0.6 cm dans les expériences. Cette limitation a toujours été vérifiée dans la suite. De cette manière, nous sommes certains que les visualisations au colorant donnent exactement le taux de croissance de l'instabilité.

Cependant, l'écoulement est très sensible au bruit. De plus, la croissance de  $A(t)$  est observable uniquement sur une décade (voir la figure 5.18). La dispersion sur la mesure du taux de croissance est donc importante (voir figure 5.21) et l'incertitude est proche de 20%. Néanmoins en réitérant l'expérience, nous avons pu obtenir une valeur moyenne du taux de croissance qui est bien représentative.

### 2.3.7 Mesure de la concentration du colorant

Nous allons analyser dans le chapitre 6 l'évolution d'une tache de colorant dans l'écoulement étudié. Nous expliquons dans ce paragraphe comment déduire la concentration en colorant de l'intensité lumineuse  $I$  des images, qui est codée sur 256 niveaux de gris. Nous avons vérifié que la caméra est effectivement linéaire en niveaux de gris. De plus, pour ces faibles concentrations, la luminosité du colorant dépend linéairement de sa concentration. La

luminosité du colorant  $I_0$  au début de l'expérience peut être calculée en utilisant une image de référence, prise avant le début de l'expérience. Pour relier l'intensité lumineuse à la concentration en colorant, nous avons supposé que l'intensité lumineuse vue par la caméra est la somme de la luminosité du colorant et de la luminosité du fond. La figure 2.21 montre l'histogramme de la luminosité du fond, calculé dans une zone ne contenant pas de colorant. Il contient un très fort pic pour un niveau de gris égal à 15, qui doit être soustrait à l'intensité lumineuse. La concentration de colorant  $c$  normalisée par sa valeur initiale  $c_0$  est ainsi calculée par la loi :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{I - 15}{I_0 - 15} \quad (2.16)$$

Cette formule sera utilisée dans tous les résultats expérimentaux du chapitre 6.



### 3. ANALYSE ET TRAITEMENT DES ERREURS LIÉES AUX FORTS GRADIENTS EN VÉLOCIMÉTRIE PAR IMAGES DE PARTICULES

Nous avons vu au chapitre précédent que nous avons utilisé de la Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) pour étudier quantitativement l'interaction des deux tourbillons. Dans l'écoulement que nous étudions, il existe de forts gradients de vitesse aux cœurs des vortex. Les algorithmes de PIV classiques étant très peu efficaces pour de tels écoulements, nous avons dû optimiser les techniques actuelles lors de la création de l'algorithme. Les méthodes nouvelles que nous avons développées sont décrites dans ce chapitre, qui reprend une publication soumise à la revue *Experiments in Fluids* sous le titre "Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in Particle Image Velocimetry".

#### Abstract

This paper deals with errors occurring in 2D cross-correlation PIV algorithms (with window shifting), when high velocity gradients are present. A first bias error is due to the difference between the Lagrangian displacement of a particle and the real velocity. This error is calculated theoretically as a function of the velocity gradients, and is shown to reach values up to 1 pixel if only one window is translated. However, it becomes negligible when both windows are shifted in a symmetric way. A second error source is linked to the image pattern deformation, which decreases the height of the correlation peaks. In order to reduce this effect, the windows are deformed according to the velocity gradients in an iterative process. The problem of finding a sufficiently reliable starting point for the iteration is solved by applying a Gaussian filter to the images for the first correlation. Tests of a PIV algorithm based on these techniques are performed, showing their efficiency, and allowing the determination of an optimum time separation between images for a given velocity field.

#### 3.1 Introduction

Over the last decade, Particle Image Velocimetry (PIV) has become a powerful and widely used technique to measure instantaneous velocity fields in a plane. For this, the flow is seeded with reflecting micro-particles, whose

displacement over a small period is measured and used to calculate the local velocity.

The particle displacement is normally obtained by a correlation technique, either by auto-correlation of a doubly (or multiply) exposed single particle image, or by cross-correlation between two successive single-exposure images. In this article we focus on the latter technique, although some results are also valid for the former. With the two-image method, the mean displacement in a given subpart of the images (the correlation box or window) is given by the location of the maximum of the cross-correlation function between the pixel intensities in the box.

With the strong increase of computer power in recent years, and the availability of high-resolution digital cameras, image acquisition and correlation computation for PIV purposes have become very easy to implement, compared to the recordings on photographic film and complex optical correlations used in the early days of PIV (see, e.g., Adrian 1991). In a majority of applications today, the PIV process is entirely digital. In this situation where PIV has become a common tool, more efforts are now directed towards the precise analysis of the accuracy of this method in different situations, and towards reducing possible errors. In this respect, the algorithm used to obtain the velocity field from the digital particle images has received special attention. It is also the object of the present paper, i.e., we will not consider errors linked to optical effects or the image acquisition procedure, but assume that the images correctly represent the true particle positions at the corresponding instants in time.

A number of studies (e.g., Willert and Gharib 1991; Westerweel 1993; Fincham and Spedding 1997; Raffel et al. 1998) have analysed the errors in the velocities calculated by PIV algorithms, and their variation with different parameters: particle image density, diameter of the particles, size of the correlation window, noise in the images, and displacement amplitude. In general, the correlation methods were found to be very accurate for nearly uniform flows. However, the accuracy is drastically reduced in the presence of high velocity gradients.

One error is caused by the corresponding deformation of the particle patterns between successive images, leading to lower and broader correlation peaks. A way to solve this problem was proposed by Huang et al. (1993a,b): a deformation of the interrogation windows according to the velocity gradients, in an iterative process. Jambunathan et al. (1995) generalised this method for flows with length scales smaller than the correlation box size, by deforming the window according to the displacement of each pixel of the window. The problem of instabilities, which were observed in such an iterative processes, was recently solved by Nogueira et al. (1999). These techniques of window deformation begin to be commonly used, and error tests have been carried out by Fincham and Delerce (2000) and Scarano and Riethmuller (2000). In all these approaches the calculation of the first correlation poses a major difficulty, since the velocity gradients are still unknown. Lin and Perlin (1998) proposed a method to achieve this first step, through a complex algorithm that reduces the size of the windows.

An additional problem arising at high velocity gradients has been pointed



out only very recently by Wereley and Meinhart (2001). In PIV, a velocity is calculated using the displacement of particles during a short time interval, i.e. one obtains an average velocity of the particle on its trajectory between the two recorded positions. If the velocity is not constant along this trajectory, which is the case when the gradients are high, this average value can be substantially different from the one at the beginning of the trajectory (the particle position in the first image), which is the point the calculated velocity is usually assigned to. It will be shown below that the resulting error in the velocity field can be an order of magnitude higher than the generally admitted uncertainty of PIV measurements in nearly uniform flows.

In the following, we intend to analyse quantitatively these two problems arising at high velocity gradients, and to find ways to reduce the associated errors.

### 3.2 Lagrangian displacement of a particle

#### 3.2.1 Background

In cross-correlation PIV, the velocity field of a fluid (projected onto a plane) is deduced from the two-dimensional displacement  $\Delta \mathbf{r}$  of small tracer particles, whose images were recorded at two times, separated by  $\Delta t$ . Assuming that  $\Delta t$  is “sufficiently” small, the particle/fluid velocity  $\mathbf{v}$  is derived from the approximate relation

$$\Delta \mathbf{r} \approx \mathbf{v} \Delta t \quad (3.1)$$

(This approach does not take into account possible differences between the particle and the fluid velocities, a point which will not be addressed here.) Eq. (3.1) represents the first term of a Taylor series expansion of the velocity field, which, in general, depends on both time and space coordinates. For nearly uniform velocities (on the scale of the correlation window), this approximation is justified. However, when spatial gradients and/or the time-dependence of the velocity field get larger, noticeable differences can appear between the *measured* velocity  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  and the *real* velocity  $\mathbf{v}$ . In this Section, we calculate higher-order terms of the expansion in Eq. (3.1), in order to quantify the measurement errors appearing at high velocity gradients. We also demonstrate analytically and numerically, how a simple technique consisting of a symmetric correlation window shift, can drastically reduce these errors.

#### 3.2.2 Calculation of the displacement

In the following, we treat two-dimensional displacements in a two-dimensional domain, which correspond to the most commonly used PIV applications. Consider a particle which, at an initial time  $t_i$ , is located at a position  $\mathbf{r}_i$ , and at a final time  $t_f$  at  $\mathbf{r}_f$  (see Fig. 3.1). We seek an expression for the displacement  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$  of the particle in a given velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , as function of the different derivatives of  $\mathbf{v}$  and the time interval  $\Delta t = t_f - t_i$ . The derivatives are evaluated at a fixed point O, which is located close to

$\mathbf{r}_f$  and  $\mathbf{r}_i$ , and can be interpreted as the measurement location (e.g., a pre-defined grid point or centre of a correlation box; see Fig. 3.1). It is the point at which the velocity needs to be known with precision. Without loss of generality, its coordinates are set to  $\mathbf{r} = 0$ . Similarly, the origin of time ( $t = 0$ ), representing the time associated to the velocity measurement, is chosen close to  $t_i$  and  $t_f$  (this point is discussed further in the Appendix).

We suppose that the non-uniform and time-dependent velocity field

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

can be expanded into a Taylor series around  $t = 0$  and the point O with respect to time  $t$  and the Cartesian coordinates  $x$  (horizontal) and  $y$  (vertical).

Up to second order, this Taylor expansion can be written in compact form as:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r} + t \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^\dagger \cdot \mathbf{v}_x'' \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^\dagger \cdot \mathbf{v}_y'' \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \partial_{tt} \mathbf{v} + t \partial_t \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r} \quad (3.3)$$

where  $\mathbf{r}^\dagger = (x, y)$  is the conjugate of  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , and

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{r} = 0 \\ t = 0 \end{pmatrix} & \mathbf{v}_x'' &= \begin{pmatrix} \partial_{xx} v_x & \partial_{xy} v_x \\ \partial_{yx} v_x & \partial_{yy} v_x \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}' &= \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} & \mathbf{v}_y'' &= \begin{pmatrix} \partial_{xx} v_y & \partial_{xy} v_y \\ \partial_{yx} v_y & \partial_{yy} v_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

The full expressions for  $\Delta \mathbf{r}$ , extending Eq. (3.1) to second and third order in  $\Delta t$ , are derived and given in the Appendix. Here, we focus on two special cases that are of particular interest for PIV algorithms. Both are related to the now frequently used technique of correlation box shifting, in which a first estimate of the velocity field is obtained using identical windows in both images, and where a second correlation is then performed, with the windows shifted by an amount corresponding to the mean local particle displacement. The aim is to reduce the apparent particle displacement between the shifted windows as much as possible to zero, in order to minimize particle loss and the associated noise effects (see, e.g., Raffel et al. 1998).

The first case corresponds to the situation depicted in Fig. 3.1a, where only the window in the second image is shifted according to the measured displacement, the one in the first image remaining centred at the measurement point O. In this “non-symmetric” situation, the particle displacement is given by (see Appendix):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0 + \partial_t \mathbf{v}) + O(\Delta t^3) \quad (3.4)$$

i.e., the displacement error is, as expected, of order  $O(\Delta t^2)$ . We will see in Sect. 6 that a PIV algorithm using window deformation can easily handle velocity gradients of the order of  $\|\mathbf{v}' \Delta t\| = 0.2$ . If at the same time the

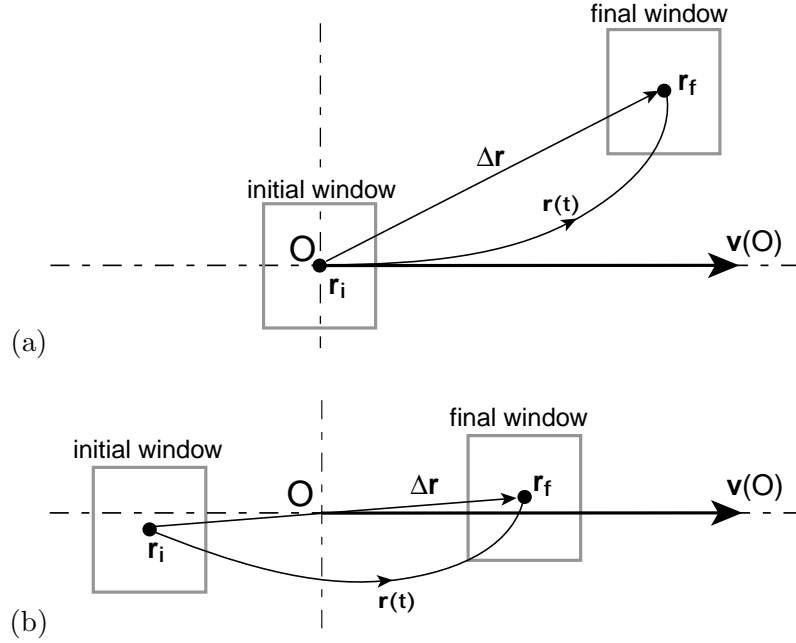


FIG. 3.1 – (a) Non-symmetric and (b) symmetric translation of correlation windows with respect to the measurement point  $O$

displacement is about  $\|\mathbf{v}\Delta t\| = 10$  pixels, i.e., about a third of a typical window size of 32 pixels, which is the upper limit proposed by Adrian (1991), the absolute error between the measured displacement of the particle and the ‘displacement’  $\mathbf{v}_0\Delta t$  associated with the point  $O$  can amount to as much as 1 pixel. This is an order of magnitude higher than the generally admitted uncertainty of classical cross-correlation algorithms, which is about 0.1 pixel (Raffel et al. 1998). It is therefore useful to look for a different procedure, for which this error is considerably smaller.

In the second case, the windows used by the algorithm are translated in a symmetric way (see Fig. 3.1b). This method has been proposed recently by Wereley and Meinhart (2001)

The result of the correlation process gives the displacement of a particle whose initial and final positions are symmetric with respect to the point  $O$ . In this situation, we find that the second order term vanishes, and the displacement of the particle becomes, at third order (see Appendix):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \Delta t + \Delta t^3 \left\{ -\frac{\mathbf{v}'^2 \cdot \mathbf{v}_0}{12} + \frac{1}{24} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}''_x \cdot \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}''_y \cdot \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \partial_t \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0 - \frac{1}{12} \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{24} \partial_{tt} \mathbf{v} \right\} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

When applying the general result in Eqs. (3.4) and (3.5) to the special case of axisymmetric flow, expressions identical to those given by Wereley and Meinhart (2001) are obtained. For  $\|\mathbf{v}'\Delta t\| = 0.2$  and  $\|\mathbf{v}\Delta t\| = 10$  pixels, the first term of the error is of the order of 0.03 pixel. Assuming that, in most cases, the other terms are of similar magnitude or less and partly compensate

each other, this error between the velocity in  $O$  and the displacement  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  measured by the algorithm can be neglected, since it is smaller than the noise in the measurements (of the order of 0.1 pixel). If one nevertheless wishes to reduce this error, two solutions are possible: either decreasing the time separation between the two images, or removing the error numerically, using Eq. (3.5) and an approximation of the velocity gradients. However, the second solution amplifies the noise present in the measurements and should be used with caution.

### 3.2.3 Numerical evidence

The previous results were derived for the displacement of a single particle. In the following we analyze the effect of a non-symmetric and a symmetric translation in an actual PIV algorithm, where average velocities in more or less extended correlation windows are calculated. We have tested the two schemes on a velocity field containing a high velocity gradient, using artificial images. We used a horizontal and stationary velocity field given by:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} Sx/\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

For such a field, the exact displacement, over a time  $\Delta t$ , of a particle which is at a position  $x$  on the first image is:

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(e^S - 1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

For the test, we have chosen a relatively high shear parameter  $S = 0.2$ , which is, however, still small enough for the algorithm to find the correlation peaks efficiently. The first and second images are created using this displacement (see Sect. 6 for details on the creation of the images). We then calculate the error of the horizontal ‘displacement’  $v_x \Delta t$ , obtained using an algorithm which translates windows of 32 pixels in either a non-symmetric or a symmetric way. The results are shown in Fig. 3.2. The agreement between the calculated errors and the theoretical predictions in Eqs. (3.4) and (3.5) is very good. Both show that the error remains weak in the symmetric case, whereas it is important and cannot be neglected in the non-symmetric case.

In the literature, artificial images are frequently constructed using a displacement  $\mathbf{v}_0 \Delta t$  instead of the real displacement of each particle in the velocity field. The error discussed in this Section was then hidden in most cases and not considered further, despite its importance.

An additional error arises due to the finite size of the window. Indeed, the algorithm averages the velocity of the particles over the whole window. This introduces a systematic error equal to  $\frac{1}{24} W^2 \Delta t \nabla^2 \mathbf{v}$ , where  $W$  is the size of the windows. This result can be obtained by integrating Eq. (3.35) (in the Appendix), with the position  $\mathbf{r}_i$  of the particle varying in the initial window (translated by  $-\mathbf{v} \Delta t / 2$ ). This error remains negligible as long as  $W$  is smaller than the typical wavelength of the flow. If the wavelength becomes too small, appropriate algorithms, presented e.g. by Nogueira et al. (1999)

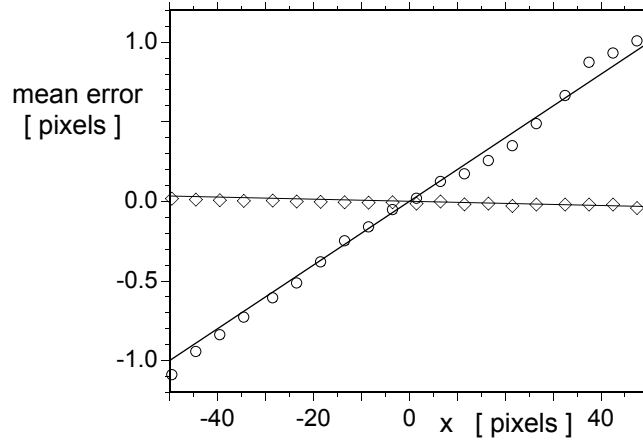


FIG. 3.2 – Error for the horizontal velocity field (3.6)  $\circ$ : non-symmetric algorithm (as in Fig. 3.1a).  $\diamond$ : symmetric algorithm (as in Fig. 3.1b). Solid lines correspond to theoretical predictions of Eqs. (3.4) and (3.5).

or Jambunathan et al. (1995), should be used. This error is not present in our tests, since  $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$  here.

In conclusion, the use of symmetric window shifting highly improves the performance of a cross-correlation algorithm by reducing the error between velocities and particle displacements to a lower value than the measurement noise due to other effects, in particular in the presence of high velocity gradients, which deform the correlation peaks. In the following, we will assume that symmetric window shifting is used, and the error discussed in this Section will therefore be neglected.

### 3.3 Effect of a velocity gradient on the correlation peak

The main error of PIV algorithms is a noise in the measurements, linked to the size and maximum value of the correlation peak. If the peak is too low, the noise in the correlation function introduces spurious vectors in the velocity field. If the peak is too wide, the determination of the maximum is less accurate and the corresponding displacement is noisy. It is thus important to keep the correlation peaks as high and narrow as possible. In the following, we analyse the effect of a velocity gradient on the shape and height of two correlation functions: one using symmetrically shifted square windows, and one using windows which are deformed according to the velocity gradients present in the flow.

#### 3.3.1 Non-deforming correlation function

For two images of intensities  $I_i(\mathbf{r})$  and  $I_f(\mathbf{r})$  at times  $t_i$  and  $t_f$ , respectively, we introduce a new symmetrical correlation function, defined by:

$$R(\mathbf{l}) = \frac{\int_W (I_i(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2) - \bar{I}_i) (I_f(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2) - \bar{I}_f) d\mathbf{r}}{(\sigma_i \sigma_f)^{1/2}} \quad (3.8)$$

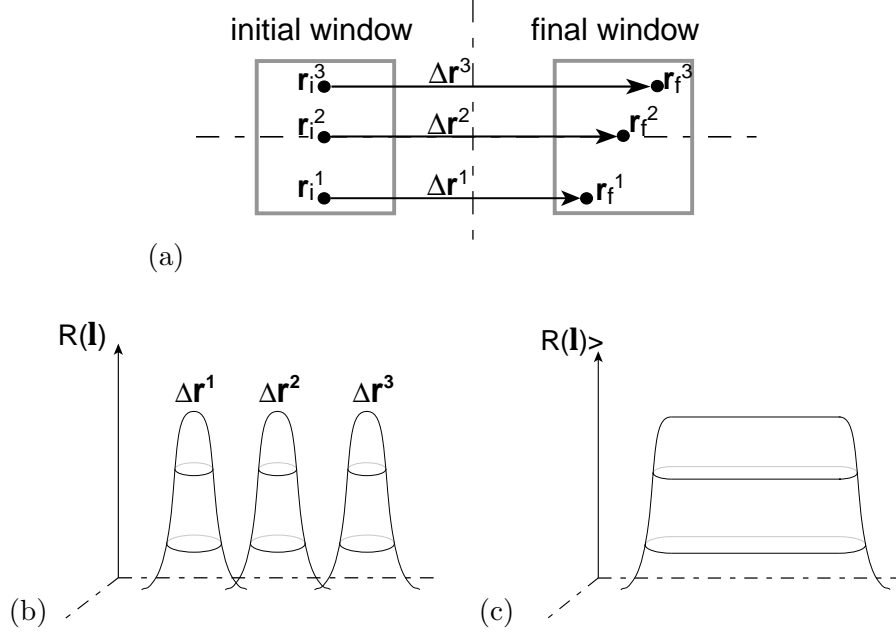


FIG. 3.3 – (a) Displacement of particles for horizontal shear. (b) Corresponding correlation function. (c) Average of the correlation function over different particle distributions

$$\text{where} \quad \begin{cases} \bar{I} = \frac{1}{W^2} \int_W I(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ \sigma = \int_W (I(\mathbf{r}) - \bar{I})^2 d\mathbf{r} \end{cases}$$

and  $W$  is the side length of a square window centred on the desired location. This function is an adaptation of the standard correlation coefficient (see, e.g., Raffel et al. 1998) to the case of a symmetric translation of the windows according to the procedure presented in the previous Section. It is normalized in a way to take values between  $-1$  and  $+1$ . This function is defined for continuous values of  $\mathbf{r}$ , even if the real algorithm only uses discrete positions. The effect of the discretisation is a slight increase in the effective size of the particles (see Westerweel 1993, Chapter 3), which remains small if their diameter is bigger than about 1 pixel.

We now assume that the velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  is given, and we call  $\mathbf{u} = \mathbf{v}\Delta t$  the ‘displacement’ field. A particle at a position  $\mathbf{r}_i$  on the first image is shifted by an amount  $\Delta \mathbf{r}(\mathbf{r}_i)$  in the second image given by (see Eq. (3.38) in the Appendix):

$$\Delta \mathbf{r}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{u}_0 + O(\Delta t^3) \quad (3.9)$$

In the presence of a velocity gradient, the displacements of the particles are not identical over the whole window (Fig. 3.3a). The correlation peaks of different particles are located at different positions (Fig. 3.3b) and cannot interfere constructively as in the case of weak velocity gradients. The correlation peak is thus wider and lower than in the absence of a velocity gradient. This effect is evaluated quantitatively in the following.

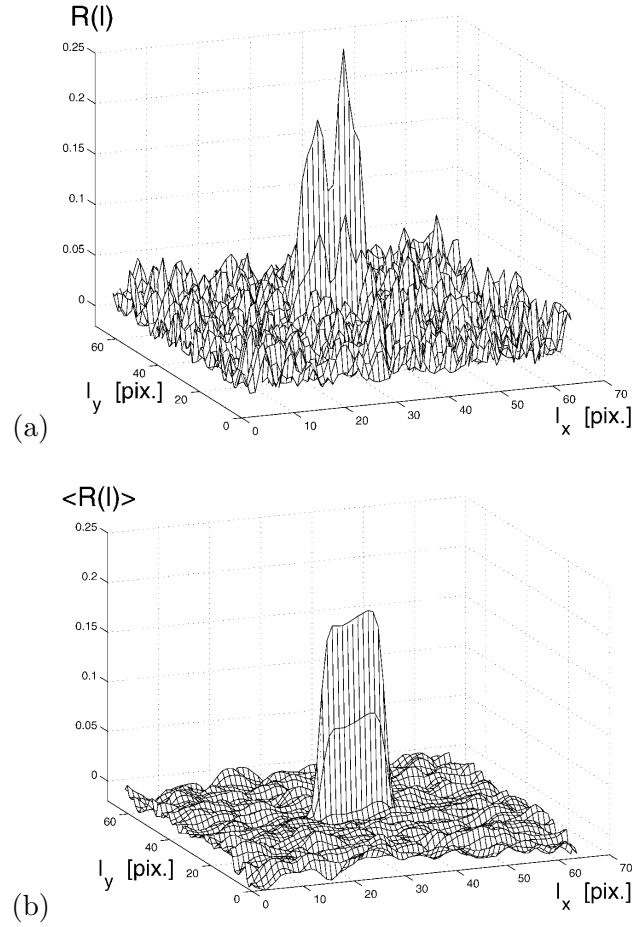


FIG. 3.4 – Correlation functions obtained from test images with a horizontal shear of magnitude  $S = \partial_y u_x = 0.4$  (window size  $W = 32$  pixels). (a) Typical result obtained at one position. (b) Average of 400 correlation functions obtained at different locations with the same mean velocity

### 3.3.2 Ensemble average

The shape of the correlation peak highly depends on the distribution of the particles. In order to recover a universal property, we consider the average over all possible particle distributions. The resulting correlation peak then only depends on the velocity field, since the average smooths all the peaks coming from individual particles in a given single distribution. Fig. 3.3(c) shows this effect schematically. This behaviour was also verified numerically using artificial images; an example is shown in Fig. 3.4.

For the following calculations we use a constant particle density  $C$ , as proposed by Adrian (1988). The symbol  $\langle . \rangle$  denotes the average over all possible particle distributions.

Westerweel (1993) showed (his Eq. 2.49) that:

$$\langle I_i(\mathbf{r}') I_f(\mathbf{r}'') \rangle - \langle I_i(\mathbf{r}') \rangle \langle I_f(\mathbf{r}'') \rangle = C F_{I_0}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' - \Delta \mathbf{r}(\mathbf{r}')) \quad (3.10)$$

$$\text{where} \quad F_{I_0}(\mathbf{l}) = \int I_0(\mathbf{r}) I_0(\mathbf{r} + \mathbf{l}) d\mathbf{r} \quad (3.11)$$

$F_{I_0}$  is the self correlation function of the intensity of one particle, denoted by  $I_0(\mathbf{r})$ . If the windows are large enough, we can assume that  $\bar{I}$ , which is the mean value of the intensity over the window, is the same for all particle distributions and equal to the ensemble average of the intensity  $\langle I \rangle$ . Similarly, we assume that  $\sigma$ , which is the integral of the variance of the intensity over one image, is given by  $\langle (I - \bar{I})^2 \rangle W^2$ , which can be simplified using Eq. (3.10) into  $CW^2 F_{I_0}(0)$ . The expression of the average of the correlation function can then be calculated using Eq. (3.10):

$$\langle R(\mathbf{l}) \rangle = \frac{1}{W^2 F_{I_0}(0)} \int_W F_{I_0}[\mathbf{l} - \Delta\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2)] d\mathbf{r} \quad (3.12)$$

This result means that the correlation function is the average of the self correlation function, centred on the displacement  $\Delta\mathbf{r}(\mathbf{r})$ , for  $\mathbf{r}$  varying in the initial window. For small velocity gradients, the displacement is nearly uniform over the window, and can be approximated by  $\mathbf{u}_0$ . Eq. (3.12) then simplifies into:

$$\langle R(\mathbf{l}) \rangle = \frac{F_{I_0}(\mathbf{l} - \mathbf{u}_0)}{F_{I_0}(0)} \quad (3.13)$$

This result means that, for uniform flow, the correlation peak is exactly equal to the self correlation function  $F_{I_0}$  centred on the displacement  $\mathbf{u}_0$ .

### 3.3.3 Height of the peak in the presence of shear

In order to calculate the height of the correlation peak, we define the intensity of one particle as:

$$I_0(\mathbf{r}) = I_{0,\max} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{d^2/8}} \quad (3.14)$$

It is a Gaussian profile (close to the experimental one) of parameter  $d^2/8$ , for which 95% of the intensity is inside a circle of diameter  $d$ . The self correlation function  $F_{I_0}$  is also a Gaussian of parameter  $d^2/4$ . We consider a shear ‘displacement’ field defined by:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} Sy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On the  $x$ -axis, the velocity is zero, and the correlation function for windows centred on this axis can be calculated using Eqs. (3.12) and (3.38):

$$\begin{aligned} \langle R(\mathbf{l}) \rangle = e^{-\frac{l_y^2}{d^2/4}} \frac{d}{2SW} & \left\{ \operatorname{erf} \left( 2\frac{l_x}{d} + \frac{Sl_y}{d} + \frac{SW}{d} \right) \right. \\ & \left. - \operatorname{erf} \left( 2\frac{l_x}{d} + \frac{Sl_y}{d} - \frac{SW}{d} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

The function ‘erf’ is the error function (integral of the Gaussian function vanishing in 0), and  $\mathbf{l} = (l_x, l_y)$ . This formula was recently given by Hart (2000),



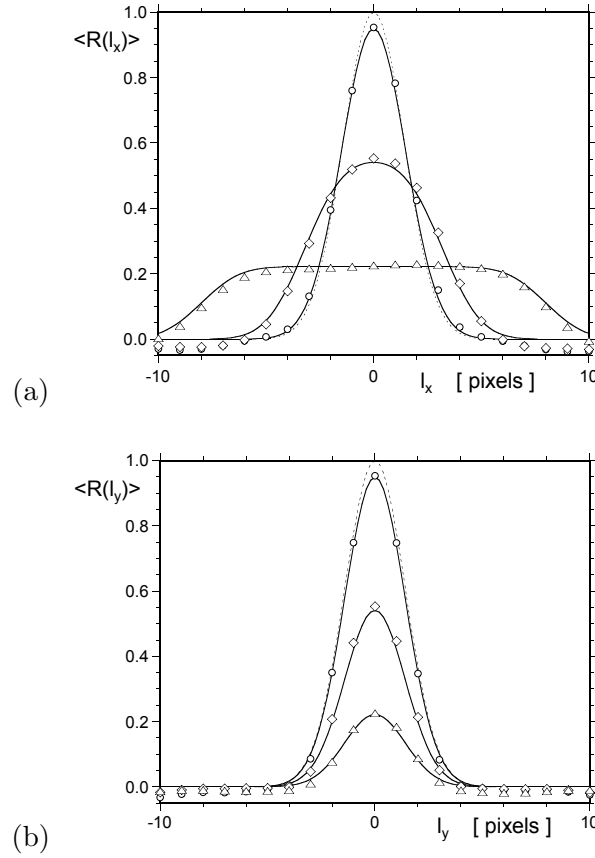


FIG. 3.5 – (a) Horizontal and (b) vertical cut through the correlation functions for horizontal shear flows (Eq. (3.15)), obtained from test images (particle diameter  $d = 4$ ; window size  $W = 32$  pixels).  $\circ$ :  $S = 0.05$ ;  $\diamond$ :  $S = 0.2$ ;  $\triangle$ :  $S = 0.5$ . The solid lines correspond to the theoretical predictions of Eq. (3.16), and the dotted line to the result for uniform flow ( $S = 0$ )

who proposed Eq. (3.12) as a conjecture without derivation. Cuts of this function along the  $x$ - and  $y$ -axes are plotted in Fig. 3.5 for different values of the shear  $S$ . The agreement with the correlation functions obtained numerically, using artificial images and a non-deforming algorithm, and also shown in these plots, is very good. (The slightly negative values are due to the use of a Fast Fourier Transforms in the correlation process.) It is obvious that increasing velocity gradients tend to widen the correlation peak. At high values of the shear, the peak even becomes flat, making the determination of the location of its maximum impossible.

The height of the peak, found for  $\mathbf{l} = 0$ , is equal to:

$$\langle R_{\max} \rangle = \frac{d}{SW} \operatorname{erf} \left( \frac{SW}{d} \right) \quad (3.17)$$

It is interesting to note that the height only depends on the non-dimensional shear parameter  $SW/d$ . Fig. 3.6 shows how it decreases with increasing  $SW/d$ . The numerical results found with artificial images are again very close to the theoretical predictions. A similar analysis was made by Huang

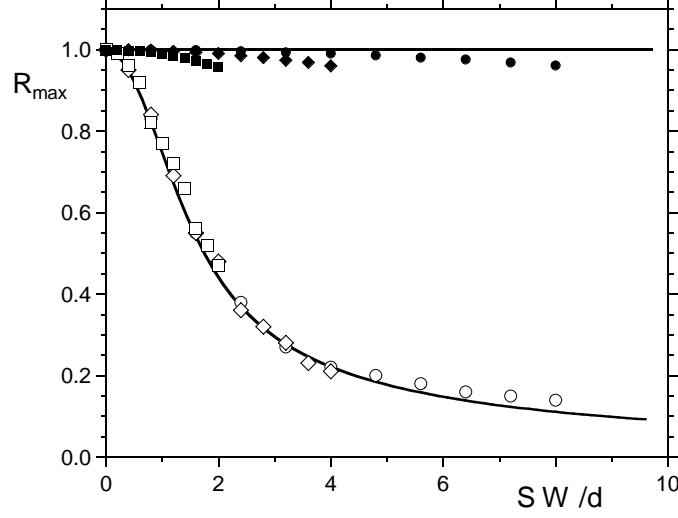


FIG. 3.6 – Height of the correlation peak as a function of the normalized horizontal shear stress for different window sizes.  $\square, \blacksquare$ :  $W = 16$ ;  $\diamond, \blacklozenge$ :  $W = 32$ ;  $\circ, \bullet$ :  $W = 64$ . Particle diameter in the test images is  $d = 4$ . Open symbols: without window deformation (the solid line represents the prediction in Eq. (3.17)). Filled symbols: with window deformation according to Sect. 3.4

et al. (1993a) for particles with a binary intensity (black or white). The same parameter was derived, although their analytical expression for the peak intensity was different.

The analytical and numerical results in this Section demonstrate how the presence of velocity gradients widens and lowers the cross-correlation peaks when (symmetrically shifted) rigid correlation windows are used. For high gradients, it is thus necessary to introduce a new correlation function.

### 3.3.4 Deforming correlation function

Huang et al. (1993b) proposed to deform the correlation windows, according to the velocity gradients present in the flow, in order to increase the height of the correlation peak. This leads to a new correlation function defined by:

$$R(\mathbf{l}) = \frac{\int_W \left( I_i(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}{2}) - \bar{I}_i \right) \left( I_f(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}}{2}) - \bar{I}_f \right) d\mathbf{r}}{(\sigma_i \sigma_f)^{1/2}} \quad (3.18)$$

$$\text{where} \quad \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y \end{pmatrix}$$

The same calculation as in Sect. 3.3.2, using Eqs. (3.10) and (3.38), leads to an average correlation function independent of the window size at second order in  $\Delta t$ :

$$\langle R(\mathbf{l}) \rangle = \frac{F_{I_0}[(1 + \mathbf{u}'/2) \cdot (1 - \mathbf{u})]}{F_{I_0}(0)} \quad (3.19)$$

For this correlation function, the height of the peak is always equal to 1. Its width increases only by 25% for a velocity gradient of 0.5, whereas it was

multiplied by a factor of 4 with the non-deforming algorithm. For the shear flow given by Eq. (3.15), the average correlation function is:

$$\langle R(\mathbf{l}) \rangle = \exp \left( -\frac{4(l_x + Sl_y)^2}{d^2} - \frac{4l_y^2}{d^2} \right) \quad (3.20)$$

A cut along the  $x$ -axis gives the same curve as without shear (i.e., the dotted line in Fig. 3.5a). On the vertical axis, it is very close to the curve without shear.

Equation 3.19 predicts a constant peak height of 1. The numerical values in Fig. 3.6, although close to 1 (and always much larger than those resulting from the non-deforming algorithm), slightly decrease with increasing shear. This may be due to the fact that not only the correlation windows, but also the individual particle images, are deformed by the algorithm; this is not taken into account in the theory.

The results of this Section clearly demonstrate the usefulness of window deformation in cross-correlation PIV, when high velocity gradients are present. However, Eq. (3.19) was obtained using Eq. (3.38), which is only a second-order approximation of the displacement of a particle. When taking into account the third-order terms, the errors discussed in Sect. 2 reappear. Moreover, the height of the peak decreases when  $\mathbf{v}''$  is not zero. One way to prevent this would be to define yet another correlation function using the third-order approximation of the displacement given in Eq. (3.35), but the resulting expressions and calculations become exceedingly complex. An alternative was proposed by Jambunathan et al. (1995) and Nogueira et al. (1999). Unfortunately, their techniques require quite a high computing power, since the algorithm must perform at least 30 iterations, whereas the present one converges in only 2 or 3 iterations (see Sect. 6). Their method becomes necessary for flows with very small wavelengths, of the order of the window size or less.

### 3.4 Gaussian Filter

For the calculation of the correlation function in Eq. (3.18), the algorithm deforms the windows according to the velocity gradients of the flow. Since the velocity field is completely unknown in the beginning, several iterations must be performed in order to converge towards a solution where velocities and velocity gradients are known together. The main problem is to obtain a sufficiently accurate result in the first run. Without the velocity gradients, the algorithm cannot calculate the deforming correlation function given by Eq. (3.18) in this first run. It must find the displacement using the non-deforming correlation function in Eq. (3.8). If the gradients are high, the associated effects discussed in Sect. 3 lead to an increased noise in the results, resulting in turn in a large number of spurious vectors, which can be very different from the real velocity vectors. If there are too many of them in the first iteration, the velocity gradients cannot be determined correctly for the second iteration and the iterative process cannot continue successfully. We thus need to increase the height of the peaks, even if some accuracy is

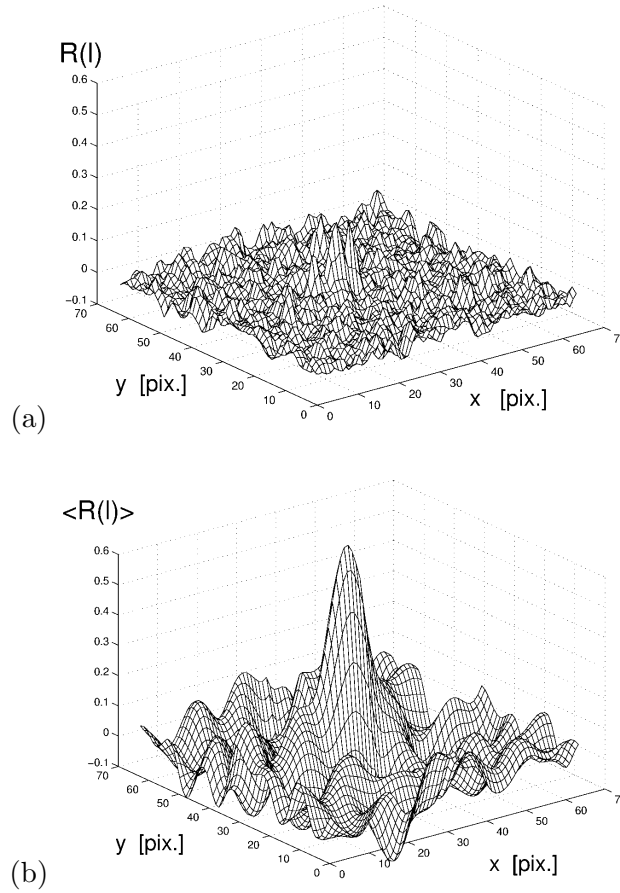


FIG. 3.7 – Typical correlation functions obtained for a velocity field given by Eq. (3.15) with  $S = 0.2$ , with a window size  $W = 64$  pixels. (a) without, and (b) with convolution of the image with a Gaussian (Eq. 3.21) of parameter  $\delta = 9$  pixels

lost. The aim is to obtain at least a rough approximation of the velocity gradients, so that the next iterations are carried out correctly.

The height of the correlation peak for non-deformed windows is linked to the parameter  $SW/d$  through Eq. (3.17) (see also Fig. 3.6). A recipe for increasing its height proposed in the literature (Fincham and Spedding 1997, Lin and Perlin 1998) is to decrease the size  $W$  of the correlation window. But by doing this, the number of particles in the window also decreases and the correlation peak is more sensitive to noise. Another idea would be to increase the diameter  $d$  of the particles. However, in an experiment, there is a maximum allowable size of the particles, if one wants them to be accurate tracers that move very closely with the fluid velocity. One way around this problem, which has been used before, consists in an optical defocussing of the flow images at acquisition, leading to bigger apparent particle images. The drawback is that, for higher iterations of the algorithm, the accuracy will always be limited by the width of the auto-correlation function of the particle intensities (Eq. (3.18)), i.e., it will be noisier than it could have been without defocussing.

In the present algorithm, the idea is to increase the size of the particles

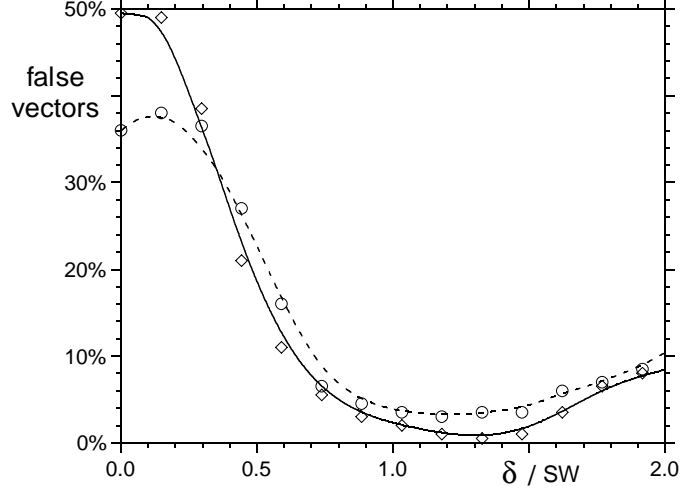


FIG. 3.8 – Fraction of false vectors (error larger than 2 pixels) obtained for images filtered with a Gaussian function defined by Eq. (3.21). The velocity field is a horizontal shear (Eq. (3.15)) with  $S = 0.15$ . Window size is  $W = 64$  pixels.  $\circ$ : without noise,  $\diamond$ : with 20% noise

numerically for the first run only, by applying a Gaussian filter to the images, i.e., an operation similar to a numerical defocussing. We convolute the image intensity matrix with a Gaussian function of parameter  $\delta^2/8$  defined by:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{8}{\pi\delta^2} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{\delta^2/8}} \quad (3.21)$$

This technique has the following advantages:

- Large sizes of the correlation window can be used, keeping the number of particles images in them high.
- The actual particles in the fluid do not need to be large. They can be chosen small enough to be considered as accurate tracers.
- The noise is smoothed during the filtering. The signal to noise ratio does not decrease in the presence of the filter.
- The unfiltered images are not lost, they are available for further iterations of the algorithm. The error, which scales on the diameter of the particles, is thus independent of the velocity gradient.

Figure 3.7 shows typical correlation functions obtained without and with Gaussian filter. Although it might seem counter-intuitive, the height of the peak increases when the images are filtered. However, the width of the peak increases simultaneously. This is why this technique should only be used for the first iteration, where only a rough approximation of the velocity field is needed. The resulting velocities are not highly accurate, but there are very few spurious vectors. This is well illustrated in Fig. 3.8, where the number of spurious vectors is plotted as a function of the parameter  $\delta$  characterising the width of the filtering function, for the example of a simple shear given by Eq. (3.15). For appropriately chosen values of  $\delta$ , the number of spurious vectors can be decreased by an order of magnitude with respect to the

unfiltered case. This technique remains efficient in the presence of noise; adding a random component to the image, whose amplitude is 20% of the maximum intensity of a particle, does not significantly change the number of spurious vectors.  $\delta$  should be chosen so that the number of spurious vectors is a minimum. If one admits that the shear flow used to obtain the result in Fig. 3.8 is representative for more general types of velocity gradients, this would occur for  $\delta/SW$  near unity. This then leads to an empirical determination of the optimal value for  $\delta$ :

$$\delta \approx W \partial_r v \Delta t \quad (3.22)$$

where  $\partial_r v$  represents the maximum velocity gradient present in the given flow, which, in many cases, can be estimated roughly beforehand.

The technique of filtering of the images with a Gaussian function thus seems very effective for the determination of a rough approximation of the velocity field, without knowledge of the velocity gradients. In the PIV algorithm used in the present study and described below, it is used for the first correlation in an iterative process.

### 3.5 Description of the algorithm

A cross-correlation PIV algorithm has been developed, using the above techniques: symmetric translation of the windows, Gaussian filtering, and window deformation according to the velocity gradients. It is briefly outlined in the following.

#### 3.5.1 First iteration

Before the first cross-correlation run, the two images are filtered with the Gaussian function defined in Eq. (3.21), with the parameter  $\delta$  chosen according to Eq. (3.22). The images are divided into correlation windows in the standard way, centred on the points of a grid, where the velocity vectors are to be calculated. The correlation function of a given window pair is obtained by a Fast Fourier Transform (FFT) routine, as recommended by Raffel et al. (1998, Section 5.4.4), but initially without the use of the weighting factor compensating the in-plane loss of pairs. This factor strongly amplifies the correlation values for large displacements, which may lead to situations where noise-generated peaks become larger than the one associated with the real particle displacement, resulting in spurious calculated velocity vectors. Once the maximum of the unweighted function is detected, the precise peak location is determined to subpixel accuracy, using a three-point Gaussian-fit estimator (Westerweel 1993, Chapter 3.8). For this, the in-plane loss correction is now applied for better accuracy. The location of the correlation peak corresponds to the velocity at the centre of the window. At the end, spurious vectors are detected and replaced by a median-filter procedure (see Westerweel 1994 for details).

### 3.5.2 Further iterations

In the subsequent iterations, the unfiltered original images are used. For an iteration number  $j$ , the windows are translated and deformed according to the displacement field  $\mathbf{u}_{j-1}$  calculated in the preceding iteration  $j-1$ . The displacement gradients  $\mathbf{u}'$  are obtained through a centred finite-difference scheme. For each correlation window, the algorithm rebuilds two new intensity functions  $\tilde{I}_i(\mathbf{r})$  and  $\tilde{I}_f(\mathbf{r})$ , where  $\mathbf{r} = (x, y)$ , and  $x, y$  range from  $-W/2$  to  $+W/2$ :

$$\tilde{I}_i(\mathbf{r}) = I_i \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}_{j-1}}{2} - \frac{\mathbf{u}'_{j-1} \cdot \mathbf{r}}{2} \right) \quad (3.23)$$

$$\tilde{I}_f(\mathbf{r}) = I_f \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u}_{j-1}}{2} + \frac{\mathbf{u}'_{j-1} \cdot \mathbf{r}}{2} \right)$$

The value of the intensity  $I_i$  and  $I_f$  *between* pixels is found by bi-linear interpolation between the 4 neighbouring values (see, e.g., Nogueira et al. 1999). A correlation function of these new intensities is calculated (equal to the deforming correlation function in Eq. (3.18)) in the same way as in the first iteration, using FFT, and the location  $\mathbf{l}_{\max}$  of its peak is determined to subpixel accuracy. The new displacement  $\mathbf{u}_j$  is then given by:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{l}_{\max} \quad (3.24)$$

False vectors are again treated using a median filter procedure.

These iterations are carried out two or three times, depending on the strength of the velocity gradients.

### 3.5.3 Last iteration

In the previous iterations, a relatively coarse grid is used for rapidity of the algorithm. In the final iteration, a refinement of the spatial resolution is achieved by increasing the number of vectors, and possibly by reducing the size  $W$  of the correlation windows. Otherwise, the procedure is the same as for the other iterations. The final displacement field has a high spatial resolution and high accuracy.

## 3.6 Error estimates and optimisation

### 3.6.1 Procedure and results

We have carried out tests with the above algorithm to determine the error caused by velocity gradients. For this purpose, pairs of artificial images were created numerically. Particles having a Gaussian intensity profile given by Eq. (3.14), with a diameter of  $d = 2$  pixels, were introduced on the first image with an average density of  $C = 0.02$  particles/pixel. This corresponds to about 20 particles in a window of  $32 \times 32$  pixels. The new positions are then calculated using the exact Lagrangian displacement of the flow under consideration, and the particles are introduced on the second image. In order to further approach typical experimental conditions, a random noise with an

amplitude equal to 10% of the maximum intensity of the particles, is added to both images.

We used shear flows defined by Eq. (3.15), with a shear parameter  $S$  varying from 0 to 0.5. For such flows, the velocity gradients are uniform. The following results are therefore mainly representative for flows with slowly varying velocity gradients (on the scale of the correlation box), e.g., flows with large vortices or large expansion or shear areas. The average ‘root-mean-square’ error between the true displacement  $\mathbf{u}$  and the displacement  $\mathbf{u}_{\text{meas.}}$  found by the algorithm, defined as

$$\varepsilon_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{meas.}}\|^2 \rangle} \quad (3.25)$$

is calculated. The average is performed over all vectors corresponding to particle displacements of up to a third of the window size  $W$ , which is the generally admitted maximum allowed displacement for the correlation to work properly. By doing this, the peak locking error is also effectively averaged out.

The results of these tests are presented in Fig. 3.9 for three different window sizes and a varying number of iterations. As a general trend, one observes a faster increase of the error for larger window sizes, which is a consequence of the associated decrease of the height of the peak (see Fig. 3.6). For a classical algorithm without window deformation, the error increases rapidly with the velocity gradient. For example, for a window size  $W = 32$  pixels, it reaches already 0.3 pixels for a relatively moderate displacement gradient of  $S (= du/dy) = 0.1$ . These results are in agreement with previous calculations made by Raffel et al. (1998). With window deformation, the error increases much slower, even after very few iterations. For the same conditions as above ( $W = 32$  pixels,  $S = 0.1$ ), the error is divided by a factor of 10 after only the second iteration. It is important to notice that it is not necessary to carry out more than 4 iterations, since no further increase in accuracy is obtained. Two or three iterations are even sufficient in the case of moderate velocity gradients. Supposing that enough iterations are made so that the calculated displacements converged, the error is found to remain almost constant up to a critical value of the displacement gradient, above which it then increases rapidly.

### 3.6.2 Optimum time separation

The preceding results may be used to determine the optimum time separation  $\Delta t$ , which should be chosen in a given experiment, i.e., the separation which minimizes the relative error in the velocity measurements, provided the algorithm in the preceding section is used, with a sufficient number of iterations. Let  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  be the experimental velocity field, which, up to a scaling factor determined by the optical arrangement, is given in pixels per unit time. We further let  $\partial_r v$  represent the maximum velocity gradient in this flow. The corresponding displacement field and displacement gradient are  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Delta t$  and  $\partial_r u = \partial_r v \Delta t$ , respectively. The relative measurement error is given by:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{\varepsilon_{\text{rms}}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\varepsilon_{\text{rms}}}{\|\mathbf{v} \Delta t\|} \quad (3.26)$$



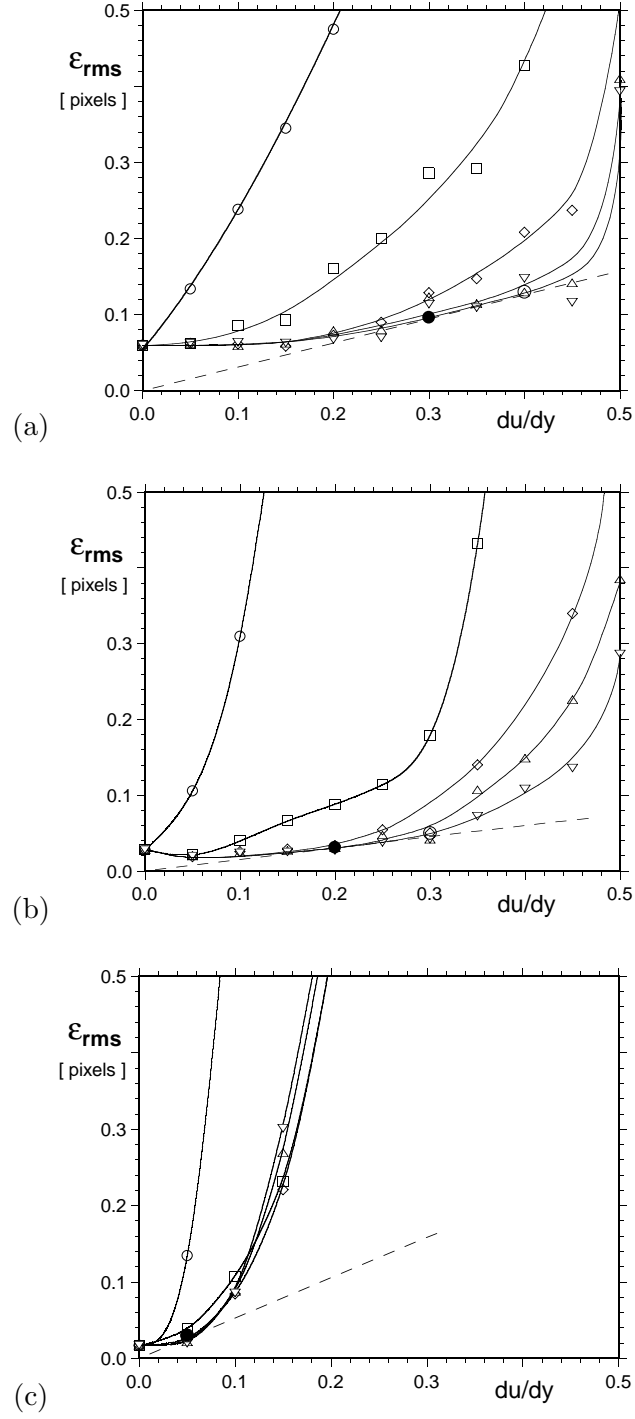


FIG. 3.9 – *Rms errors obtained with artificial images. ○: algorithm without window deformation; □, ◇, ▽, △: with window deformation after 2, 3, 4, and 5 iterations, respectively. Window sizes are: (a)  $W = 16$  pixels, (b)  $W = 32$  pixels; (c)  $W = 64$  pixels*

At first sight, Eq. (3.26) would suggest that the relative error decreases with increasing  $\Delta t$ , so that the latter should be chosen as high as possible.

However, Fig. 3.9 shows that the absolute error  $\varepsilon_{\text{rms}}$  tends to increase with the displacement gradient, and therefore also with  $\Delta t$ , which may work against the positive effect of increasing displacement  $\mathbf{u}$ . In order to assess the net result, it is useful to rewrite the relative error as

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{\varepsilon_{\text{rms}}}{\partial_r u} \cdot \frac{\partial_r v}{\|\mathbf{v}\|} \quad (3.27)$$

The second term is entirely determined by the flow field, and independent of  $\Delta t$ ; it is the inverse of a characteristic length scale  $L$  of the velocity field. The first term depends on the time separation via  $\partial_r u$ . Supposing  $\varepsilon_{\text{rms}}$  varies approximately as in Fig. 3.9, this term is minimum when the displacement gradient  $\partial_r u$  equals some optimum value  $S_{\text{opt}}$ , which is a function of the correlation window size. We find  $S_{\text{opt}} \approx 0.3, 0.2, 0.05$  for  $W = 16, 32, 64$  pixels, respectively. These values correspond to the black dots in Fig. 3.9. They are found by minimizing the slope of the line joining the origin and a given data point in Fig. 3.9. The first term in Eq. (3.27) corresponds to this slope. For a given velocity field with a gradient  $\partial_r v$ , this condition on the displacement gradient leads to a first estimate of the optimal time separation:

$$\Delta t_1 \approx \frac{S_{\text{opt}}}{\partial_r v} \quad (3.28)$$

An additional well known limitation for  $\Delta t$  is given by the fact that the particle displacement between images should not exceed about a third of the correlation window size (Adrian 1991), in order to prevent excessive in-plane loss of pairs. The corresponding upper bound for the time separation is

$$\Delta t_2 \approx \frac{W}{3\|\mathbf{v}\|} \quad (3.29)$$

In summary, since the time separation should never exceed this limit, the condition given in Eq. (3.28) should be modified into:

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2) \quad (3.30)$$

As a final result, an estimation of the minimum relative error as function of the flow length scale  $L$ , achievable with the present algorithm, is given in Fig. 3.10. For this, a somewhat more conservative absolute error of  $\varepsilon_{\text{rms}} = 0.1$  was assumed, which is thought to be more representative of measurements on realistic flows than the values in Fig. 3.9. The relative error was calculated in the following way: for  $\Delta t_1 < \Delta t_2$  (i.e., for small length scales  $L$ ), it is given by Eq. (3.27), with  $\partial_r u = S_{\text{opt}}$ . For  $\Delta t_1 > \Delta t_2$  (large  $L$ ), we use Eqs. (3.26) and (3.29).

The 32-pixel window shows the best overall performance. For most length scales the error is less than 1%. High deviations are only observed for lengths considerably smaller than the window size. For characteristic lengths larger than about 200 pixels, i.e., for nearly uniform flows, the use of 64-pixel windows leads to more accurate results. The error for  $W = 16$  is twice as high as for  $W = 32$  for high  $L$ , due to the reduced maximum allowable displacement; and even for low  $L$ , the gain in accuracy is not very significant.

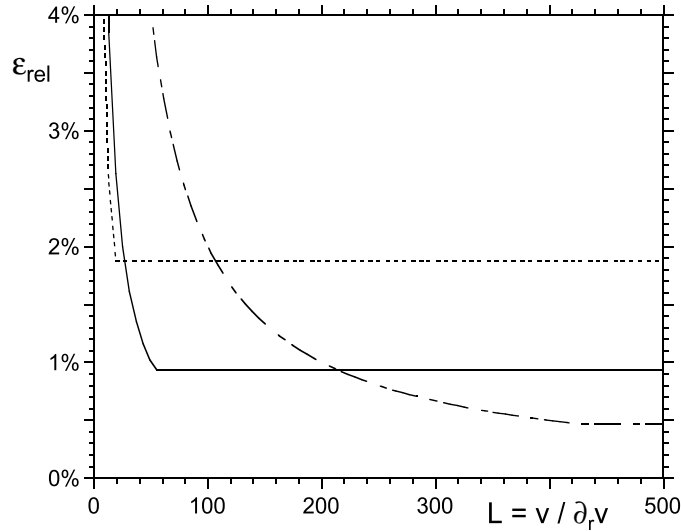


FIG. 3.10 – Minimum relative error that can be obtained with the present algorithm as a function of the characteristic length of the flow, for different window sizes:  $W = 16$  pixels (dotted line);  $W = 32$  pixels (solid line);  $W = 64$  pixels (dash-dotted line)

### 3.7 Summary

In this paper, we have performed an analytical and numerical study of the effects of velocity (displacement) gradients in cross-correlation PIV algorithms with window shifting and deformation.

Expressions for the error between measured displacement (representing the average velocity of a particle on its trajectory between the two images) and the displacement corresponding to the true velocity at the measurement location were obtained as function of the velocity field, up to third order in space and time. These results show that an important bias error exists, even for moderate displacement gradients, when correlation windows are displaced in a non-symmetric way. On the other hand, this error is reduced to a level below the standard noise-related error when using symmetric translations of the correlation windows in the two images.

The effect of gradients on the shape and height of the correlation peaks was also analysed in detail. Analytic expressions for peak profiles were calculated for both non-deforming and deforming symmetric algorithms. They show that the strong broadening of the peak and decrease of its amplitude, observed in the presence of gradients for the case without deformation, is strongly reduced when deforming the correlation windows according to the gradients of the flow.

A method of obtaining a reliable first approximation of the velocity field, without previous knowledge of velocities or gradients, is proposed and tested successfully. It is based on a numerical filtering of the images, which increases the apparent size of the individual particle images in the first run only.

All theoretical predictions were tested for representative flow configurations, using artificial images. The agreement between analytical and numerical results is excellent.

rical results, as well as between the present general results and special cases treated in the literature, is found to be very good.

An iterative PIV algorithm was developed, using the techniques described in this paper, and adapting the window deformation technique, initially proposed by Huang et al. (1993b), to the use of Fast Fourier Transforms for increased processing speed. Error tests performed with artificial images demonstrate that, even in the presence of relatively large gradients, only a few iterations with window deformation are necessary to reduce the error to a level obtained for almost uniform flows with a non-deforming algorithm. Based on these error estimates, a practical guideline for the choice of the optimum time separation between images is given, as function of the velocities and gradients present in the flow under consideration.

The techniques and algorithm described here were used very successfully in the detailed quantitative study of the two- and three-dimensional interactions of two co-rotating vortices, for which they were initially developed. The results from this work are reported elsewhere (Meunier and Leweke 2001a,b).

## Appendix

We seek an expression for the displacement  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$  of a particle in the velocity field given by Eq. (3.3). At  $t = t_i$ , the particle is located at  $\mathbf{r}_i$ , and at  $t = t_f$  at  $\mathbf{r}_f$ . The origin of time ( $t = 0$ ) is given by the time at which one wishes to determine the velocity at the reference point 0 (of coordinates  $\mathbf{r} = 0$ ). All derivatives are taken at this point and time. The particle trajectory  $\mathbf{r}(t)$  is calculated by an iterative process as successive solutions of the differential equation

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{r}(t)] \quad (3.31)$$

at increasing orders of  $t$  and  $\mathbf{r}$ .

At first order, the solution  $\mathbf{r}_1(t)$  of Eq. (3.31) (using Eq. (3.3) taken at order 0) is given by:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_i + \int_{t_i}^t \mathbf{v}_0 dt' = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0(t - t_i) \quad (3.32)$$

Introducing this result into (3.3) leads, at first order, to:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{r}_1(t)] = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0 t) + t \partial_t \mathbf{v} \quad (3.33)$$

The solution of Eq. (3.33) is the approximation  $\mathbf{r}_2(t)$  of the trajectory to the second order:

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0(t - t_i) + \frac{t^2 - t_i^2}{2} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}_i(t - t_i) + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0 \frac{(t - t_i)^2}{2} \quad (3.34)$$

The third-order approximation  $\mathbf{r}_3(t)$  of the particle trajectory is found in the same way, the final result being:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_3(t) &= \mathbf{r}_i + \int_{t_i}^t \mathbf{v}[\mathbf{r}_2(t')] dt' \\
&= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_0(t - t_i) + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}_i(t - t_i) \\
&\quad + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0 \frac{(t - t_i)^2}{2} \\
&\quad + \mathbf{v}' \cdot \partial_t \mathbf{v} \left( \frac{t^3 - t_i^3}{6} - \frac{t_i^2}{2}(t - t_i) \right) \\
&\quad + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{r}_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}_0 \frac{(t - t_i)^3}{6} \\
&\quad + \partial_t \mathbf{v} \frac{t^2 - t_i^2}{2} + \left( \begin{array}{c} \mathbf{r}_i^\dagger \cdot \mathbf{v}_x'' \cdot \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_i^\dagger \cdot \mathbf{v}_y'' \cdot \mathbf{r}_i \end{array} \right) \frac{t - t_i}{2} \\
&\quad + \left( \begin{array}{c} \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}_x'' \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^\dagger \cdot \mathbf{v}_x'' \cdot \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}_y'' \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^\dagger \cdot \mathbf{v}_y'' \cdot \mathbf{v}_0 \end{array} \right) \frac{(t - t_i)^2}{4} \\
&\quad + \left( \begin{array}{c} \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}_x'' \cdot \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_0^\dagger \cdot \mathbf{v}_y'' \cdot \mathbf{v}_0 \end{array} \right) \frac{(t - t_i)^3}{6} + \partial_{tt} \mathbf{v} \frac{t^3 - t_i^3}{6} \\
&\quad + \partial_t \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}_i \frac{t^2 - t_i^2}{2} \\
&\quad + \left( \frac{t^3 - t_i^3}{3} - \frac{t^2 - t_i^2}{2} t_i \right) \partial_t \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

*Non-symmetric displacement* - For the displacement corresponding to Fig. 3.1a, we have  $\mathbf{r}_i = 0$ , and the choice  $t_i = 0$  and  $t_f = \Delta t$  seems appropriate. Using Eq. (3.34), this leads to Eq. (3.4), showing that in this case the error between the measured velocity  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ , and the true velocity  $\mathbf{v}_0$  at the measurement location and at the time of the first image is of second order in  $\Delta t$ . One could also choose the origin of time halfway between  $t_i$  and  $t_f$  (see Eq. (3.37) below), which means that the measured velocity field is associated to the instant between the exposures of the two images. In this case the term proportional to  $\partial_t \mathbf{v}$  in Eq. (3.4) would vanish, but the error, now given by Eq. (3.38), would still remain of  $O(\Delta t^2)$ .

*Symmetric displacement* - For the displacement corresponding to the symmetric window shifting in Fig. 3.1b, the following relations hold:

$$\mathbf{r}_f = -\mathbf{r}_i = \frac{\Delta \mathbf{r}}{2} \tag{3.36}$$

$$t_f = -t_i = \frac{\Delta t}{2} \tag{3.37}$$

Introducing Eq. (3.37) into Eq. (3.34), we obtain for  $t = t_f$ :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \Delta t + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}_i \Delta t + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_0 \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \tag{3.38}$$

and, with Eq. (3.36) and  $\mathbf{I}$  being the unit matrix,

$$\left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}' \right) \cdot (\Delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 \Delta t) = O(\Delta t^3) \tag{3.39}$$

This results in

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \Delta t + O(\Delta t^3) \quad (3.40)$$

showing that, for a symmetric displacement, the error is only of order  $\Delta t^3$ . The expression in Eq. (3.5) for this higher-order term is found by introducing Eqs. (3.36), (3.37) and (3.40) into Eq. (3.35).

## 4. FUSION BIDIMENSIONNELLE

### Résumé

Ce chapitre décrit en détail l'interaction des deux tourbillons à faible nombre de Reynolds ( $Re < 2000$ ), dominé par le phénomène de fusion laminaire et bidimensionnelle des deux tourbillons.

L'évolution de l'écoulement fait apparaître trois étapes. Dans une première étape, la paire tourne sur elle-même à une vitesse angulaire très proche de celle d'une paire de deux tourbillons ponctuels. Au cours de cette phase, la taille des cœurs  $a$  croît par diffusion visqueuse jusqu'à une fraction critique de la distance de séparation  $b$ . Au dessus de ce rapport  $(a/b)$  critique, les deux vortex fusionnent en un unique tourbillon, en éjectant des filaments de vorticité. Cette deuxième étape est une transition rapide et principalement convective, qui dure environ une demi-période de rotation de la paire. Dans une troisième phase, les filaments s'enroulent autour de la structure centrale à cause de la rotation différentielle, ce qui axisym  trise le vortex final, dont la taille croît de nouveau par diffusion visqueuse.

En modélisant la première phase comme une phase visqueuse, et la deuxième étape par un mécanisme convectif, nous avons trouvé une loi liant le temps de fusion au nombre de Reynolds. En confrontant ce modèle avec les résultats expérimentaux obtenus pour 7 nombres de Reynolds différents, nous avons déduit un critère de fusion objectif : le rapport critique  $(a/b)_c$  au delà duquel la fusion débute est égal à 0.24. Nous avons montré que ce critère est proche des résultats trouvés dans la littérature, lorsque la taille du cœur est définie comme le rapport entre la racine carrée du moment angulaire  $J$  d'un vortex et la circulation ( $a = \sqrt{J/\Gamma}$ ).

Pour expliquer ce phénomène de fusion, nous avons étudié les lignes de courant créées par deux vortex ponctuels, dans le référentiel tournant avec la paire. Lorsque la vorticité atteint le point hyperbolique extérieur, elle est advectée par les lignes de courant à l'extérieur de la paire, créant les filaments de vorticité. Pour conserver le moment angulaire global, les deux vortex doivent nécessairement se rapprocher. Ce mécanisme semble être une explication correcte du processus de la fusion. Par un modèle théorique simple, qui calcule de manière séparée le moment angulaire des filaments, et le moment angulaire des vortex, nous avons montré que la distance de séparation décroît lentement (selon un temps visqueux) jusqu'à une valeur critique, au delà de laquelle le système se déstabilise. La distance de séparation saute alors à une valeur deux fois plus faible, selon une échelle de temps convective.

Le vortex final est caractérisé par une taille de cœur  $a_f$  dont le carré est deux fois plus grand que le carré de la taille du cœur des vortex ini-

tiaux :  $a_f^2 = 2a_i^2$ . En supposant que le moment angulaire et la circulation sont conservés, ce rapport serait égal à 5 si le vortex final était Gaussien. Néanmoins, le vortex n'est pas Gaussien juste après la fusion, ce qui explique cette différence. À l'inverse, en supposant que l'énergie du système et le niveau de vorticité sont conservés (cette hypothèse est valable en turbulence bidimensionnelle à haut nombre de Reynolds), le rapport devrait être égal à  $\sqrt{2}$ . Ce dernier modèle ne satisfait pas la conservation de la circulation, car il néglige l'effet des filaments de vorticité dans le vortex final, ce qui peut expliquer le désaccord avec nos résultats expérimentaux.

## 4.1 Description de la fusion

Dans cette section nous décrivons le phénomène de la fusion dans un écoulement bidimensionnel à bas nombre de Reynolds ( $Re < 2000$ ). La figure 4.1 présente six visualisations au colorant, effectuées dans des plans perpendiculaires aux axes des tourbillons,    différents instants lors de la fusion. Ces visualisations aident à comprendre qualitativement le phénomène de la fusion. Cependant, l'étude quantitative du phénomène de la fusion a été essentiellement basée sur l'analyse des champs de vitesse qui sont présentés dans la figure 4.2. Les champs de vorticité de la figure 4.3 sont issus des champs de vitesse précédents par différences finies. En utilisant ces différentes observations de l'écoulement au cours du temps, nous avons distingué différentes phases dans l'évolution de la paire de tourbillons.

### 4.1.1 Enroulement spiral des nappes

Dans une première phase, les nappes de vorticité créées le long des pales s'enroulent en spirales, puis se lissent en deux tourbillons de profil Gaussien. Ce mécanisme n'a pas été analysé en détail, bien que le dispositif expérimental puisse être adapté à une étude précise de l'enroulement de la nappe. Cela fera l'objet de travaux ultérieurs. Pour que cette phase ne soit pas influencée par l'interaction entre les tourbillons, ils sont initialement séparés par une grande distance. Cela explique pourquoi la distance entre les tourbillons, tracée dans la figure 4.6, est initialement plus grande que sa valeur moyenne  $b_0$ .

Le nombre de Reynolds, basé sur la circulation, est proportionnel à la vitesse angulaire maximale des pales  $\dot{\Theta}_{\max}$ . Par contre, la taille initiale des cœurs des vortex semble indépendante du nombre de Reynolds. En effet, la figure 4.4 montre qu'en extrapolant l'évolution temporelle de la taille du cœur aux temps nuls, les courbes se croisent en une valeur proche de 0.3 cm à l'instant initial. Nous pouvons ainsi modifier indépendamment les deux paramètres de l'écoulement : la vitesse des pales dicte le nombre de Reynolds, et la distance entre les pales dicte le rapport initial  $(a/b)_0$ .



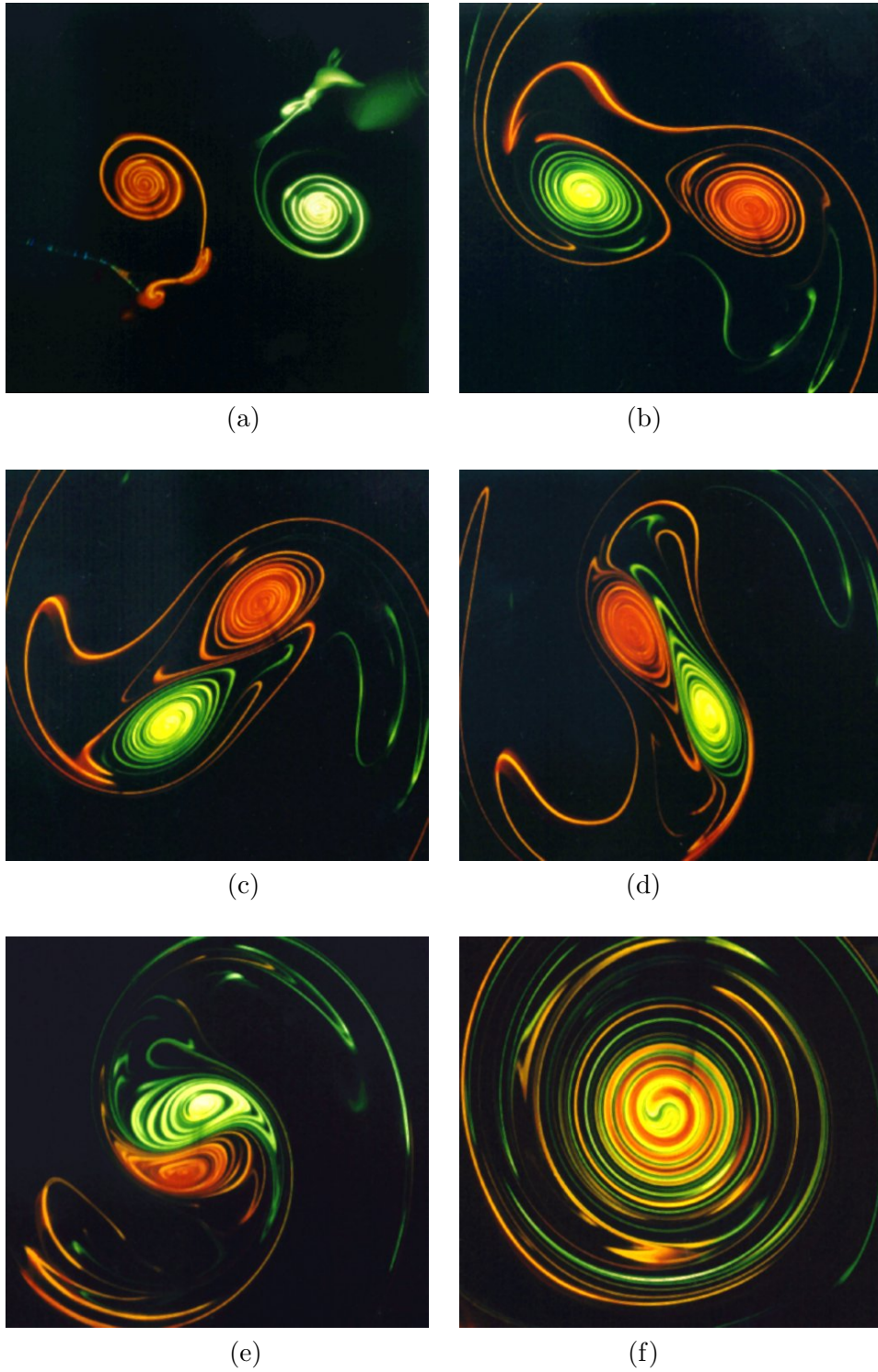


FIG. 4.1 – Visualisation au colorant de la fusion bidimensionnelle entre deux tourbillons symétriques, pour un nombre de Reynolds proche de 2000. (a)  $t^* = 0.2$ , (b)  $t^* = 0.7$ , (c)  $t^* = 0.8$ , (d)  $t^* = 0.9$ , (e)  $t^* = 1.1$ , (f)  $t^* = 2.0$ .

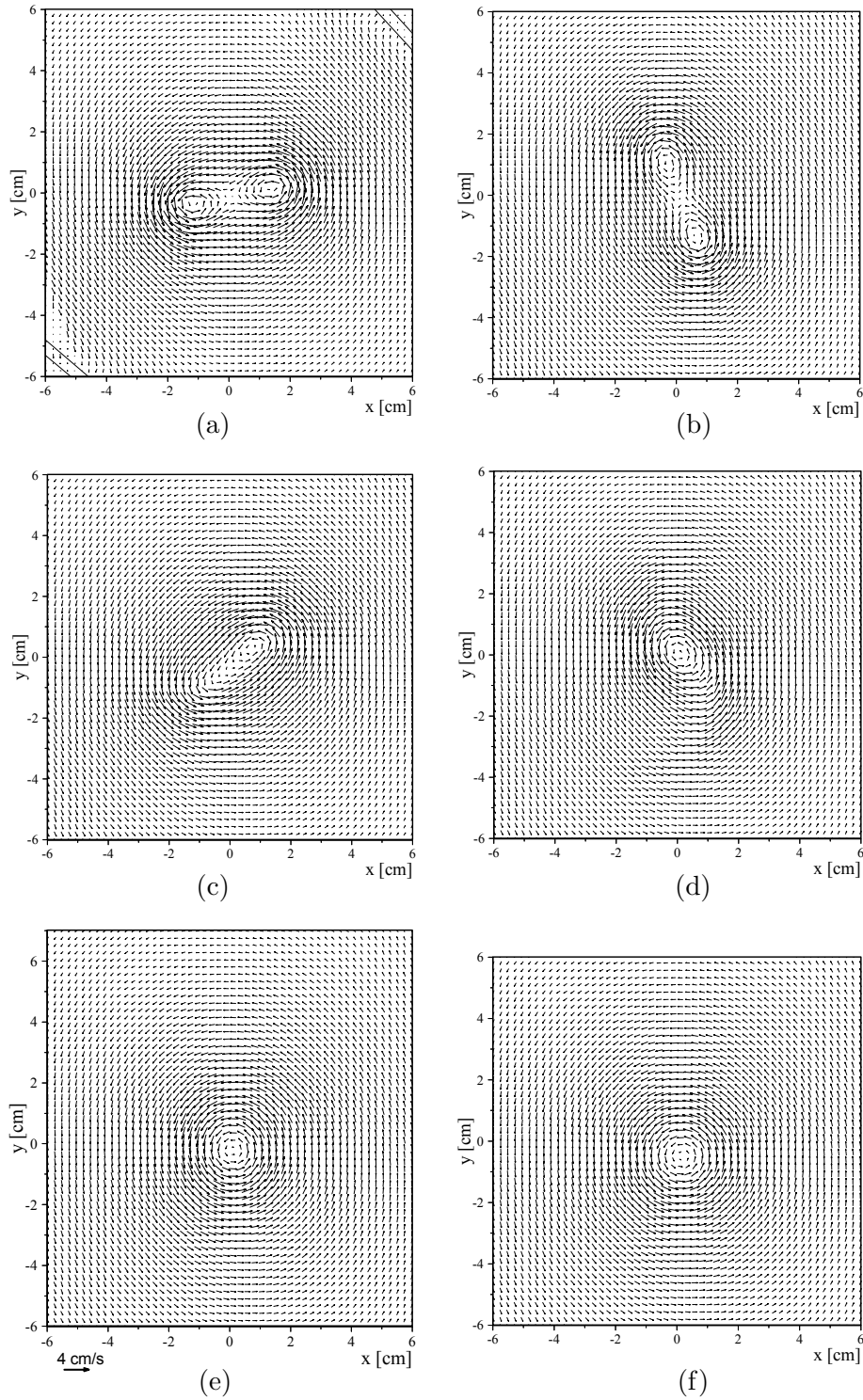


FIG. 4.2 – Champs de vitesse obtenus lors de la fusion bidimensionnelle entre deux tourbillons symétriques, pour un nombre de Reynolds égal à 1506 et un rapport initial  $(a/b)_0$  égal à 0.15. (a)  $t^* = 0.7$ , (b)  $t^* = 1.0$ , (c)  $t^* = 1.2$ , (d)  $t^* = 1.4$ , (e)  $t^* = 1.6$ , (f)  $t^* = 2.0$ .

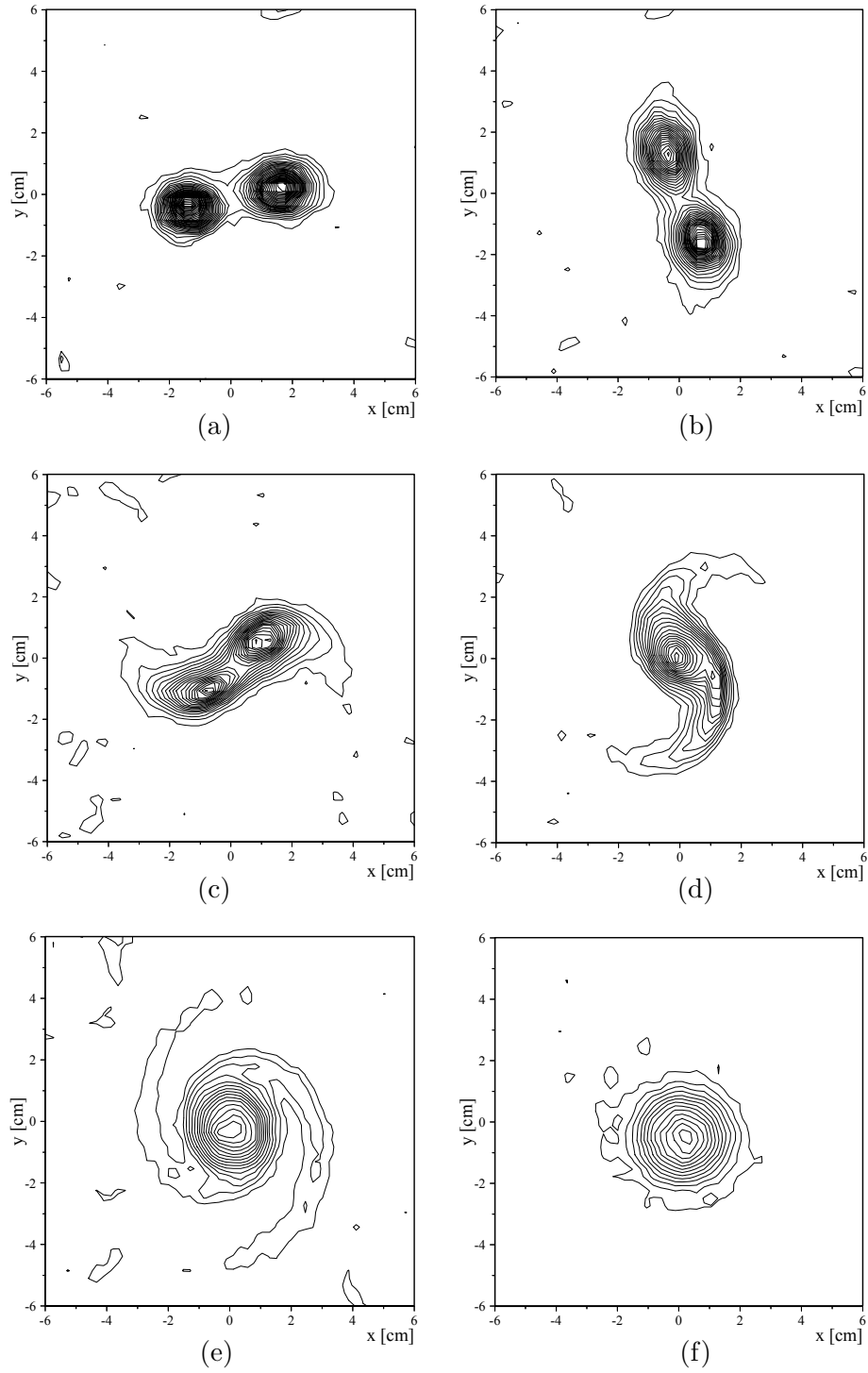


FIG. 4.3 – Champs de vorticité obtenus lors de la fusion bidimensionnelle entre deux tourbillons symétriques, pour un nombre de Reynolds égal à 1506 et un rapport initial  $(a/b)_0$  égal à 0.15. (a)  $t^* = 0.7$ , (b)  $t^* = 1.0$ , (c)  $t^* = 1.2$ , (d)  $t^* = 1.4$ , (e)  $t^* = 1.6$ , (f)  $t^* = 2.0$ .

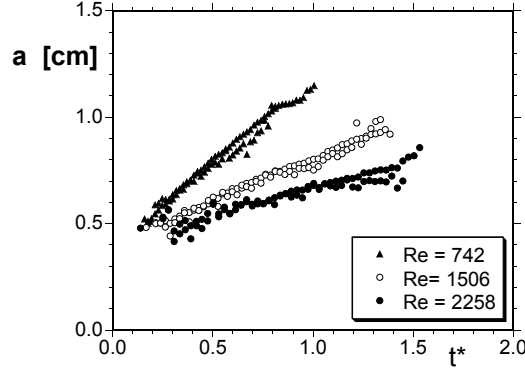


FIG. 4.4 – Taille des cœurs des vortex après enroulement des nappes de vorticité. La diffusion visqueuse fait croître la taille des cœurs, avec une vitesse dépendant du nombre de Reynolds (en unités de temps convectives).

Cette phase est ignorée par la suite, car elle est intrinsèque au dispositif de création des vortex. Nous nous intéresserons uniquement à l'interaction des tourbillons, une fois qu'ils sont créés.

#### 4.1.2 Deux vortex quasi-punctuels

Après la formation des vortex, les tourbillons se comportent approximativement comme deux tourbillons punctuels. Cela correspond à la première étape d'interaction des deux vortex. Au début de cette étape, les deux tourbillons sont pratiquement axisymétriques, comme le montre la visualisation de la figure 4.1(a). Ensuite, ils deviennent légèrement elliptiques et deux pointes se forment à l'intérieur de la paire, qui sont visibles dans la figure 4.1(b).

**Orientation de la paire :** Lorsque les deux vortex sont suffisamment petits, la vitesse de rotation de la paire est proche de celle obtenue pour deux tourbillons punctuels, définie par :

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\pi b_0^2} \quad (4.1)$$

La figure 4.5 montre l'angle  $\theta$  que fait la paire de tourbillons avec l'axe (Ox).  $\theta$  croît approximativement linéairement avec le temps, avec une vitesse très proche de la vitesse angulaire  $\Omega$  de deux vortex punctuels. Cependant, la figure 4.5 montre que l'angle  $\theta$  oscille légèrement autour de la loi linéaire, indiquant que la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  n'est pas exactement constante. Cette variation de  $\dot{\theta}$  vient de l'ellipticité des trajectoires des vortex (voir figure 2.6), car en prenant en compte la variation de  $b$  (elle est visible sur la figure 4.6) dans la formule (4.1), la prédiction théorique donnée par  $\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \Gamma / \pi b^2(t) dt$  suit de nouveau très précisément les variations de la valeur expérimentale de  $\theta$ .

Le fait que les vortex ne sont pas punctuels semble peu affecter la vitesse de rotation de la paire, qui est toujours proche de  $\Gamma / \pi b^2$ , même lorsque  $b$

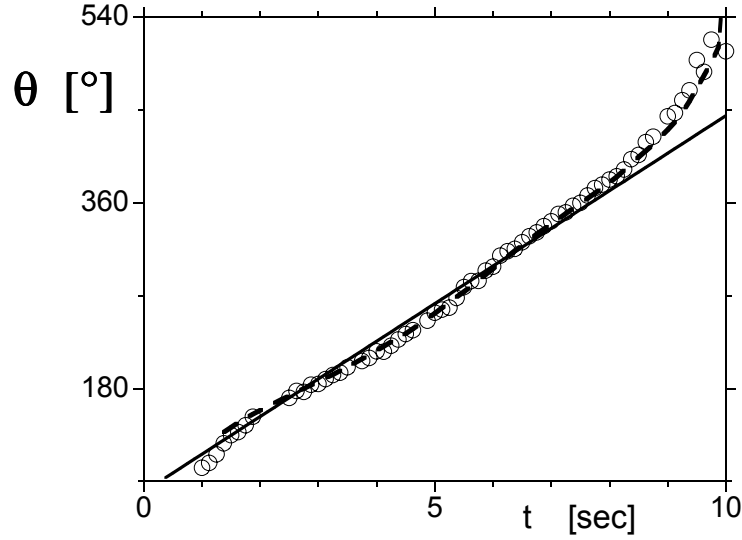


FIG. 4.5 – Evolution temporelle de l'angle que fait la paire de tourbillons avec l'axe ( $Ox$ ). La ligne continue correspond à une vitesse angulaire constante donnée par la formule 4.1. La ligne discontinue correspond à une vitesse angulaire  $\Gamma/\pi b^2$ , pour laquelle les variations de  $b$  avec le temps sont prises en compte.

décroît<sup>1</sup>. Cela se comprend par le raisonnement suivant. La vitesse absolue du vortex 1 vaut  $v_1 = \Gamma_2(b)/2\pi b$ , où  $\Gamma_2(b)$  est la circulation du vortex 2 sur un cercle de rayon  $b$ . Cette circulation est très proche de la circulation totale  $\Gamma_2$  même pour des tailles de cœur élevées, puisque les profils sont presque Gaussiens. La différence relative  $(\Gamma_2 - \Gamma_2(b))/\Gamma_2$  vaut uniquement 0.2% pour un rapport  $a/b$  égal à 0.4. Comme les vortex tournent sur un cercle de rayon  $b/2$ , la vitesse de rotation de la paire est donnée par  $\Omega = v_1/(b/2)$ , qui est donc très proche de la vitesse angulaire donnée dans la formule (4.1).

**Distance de séparation :** Au cours de cette première étape, la distance de séparation varie peu, comme montré dans la figure 4.6. La valeur moyenne de  $b$  au cours de cette étape permet de définir la distance initiale  $b_0$  entre les deux tourbillons. Cette distance sert à adimensionner les distances dans l'écoulement, notamment la taille des cœurs des vortex. En fait, la distance de séparation oscille légèrement autour de sa valeur moyenne, avec une période égale à la moitié de sa période de rotation. Cela vient du fait que la trajectoire des tourbillons est légèrement elliptique, car l'écoulement est influencé par le mouvement des pales (voir section 2.1.3).

**Taille du cœur :** Au cours de cette étape, la taille du cœur croît par diffusion visqueuse, comme le montre la figure 4.4. La croissance du cœur dépend du nombre de Reynolds selon le temps convectif  $t^*$ . Cela vient du fait que cette croissance possède une échelle de temps visqueuse. En effet, un tourbillon Gaussien est une solution exacte des équations de Navier-Stokes si le carré

1. Cela crée alors une croissance très rapide de  $\theta$  sur la figure 4.5

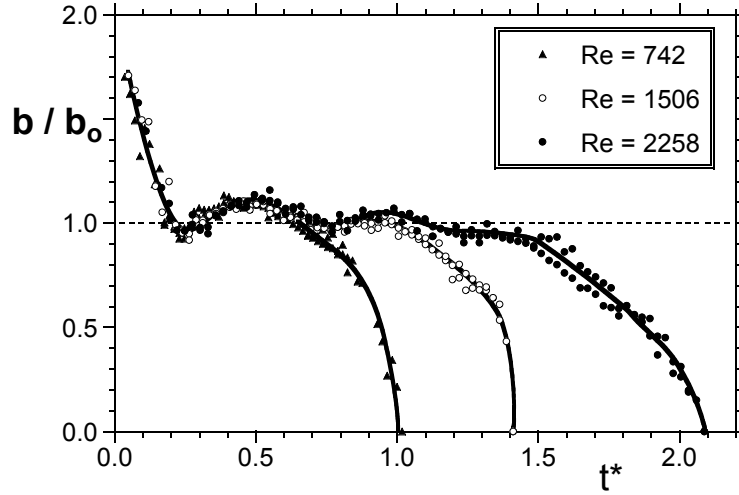


FIG. 4.6 – Evolution de la distance de séparation adimensionnée au cours de la fusion pour différents nombres de Reynolds.

de sa taille augmente linéairement avec le temps selon :

$$a^2 = 4\nu(t - t_0) \quad (4.2)$$

En introduisant le temps adimensionné défini par (2.4), on obtient une loi linéaire pour la croissance de  $(a/b)^2$  :

$$\left(\frac{a}{b_0}\right)^2 = \frac{8\pi^2}{Re}(t^* - t_0^*) \quad (4.3)$$

Cette loi est représentée par des droites de pente 1 dans la figure 4.7. Les données sont en très bon accord avec cette prédiction. Il est intéressant de voir que ce phénomène est très robuste, et ne semble pas être modifié par la présence du vortex opposé, bien que les vortex soient légèrement elliptiques.

Au cours de cette étape, le rapport  $a/b$  augmente à cause de la croissance visqueuse des cœurs. Dans le cas d'un écoulement à très haut nombre de Reynolds, et notamment en turbulence bidimensionnelle, ce rapport  $a/b$  peut augmenter grâce à d'autres phénomènes. Par exemple, la présence d'un troisième vortex peut faire se rapprocher les deux tourbillons. Dans tous les cas, lorsque la taille du cœur atteint environ un quart de la distance de séparation, deux pointes apparaissent à l'extérieur des vortex, visibles sur le champ de vorticité de la figure 4.3(b). Le système semble alors devenir instable, marquant ainsi une transition vers une autre étape.

#### 4.1.3 Fusion convective rapide

Au début de cette deuxième étape, les deux tourbillons créent des pointes à l'intérieur et à l'extérieur, qui sont bien visibles sur la visualisation de la figure 4.1(d). Les pointes intérieures coulisent l'une sur l'autre en entrainant le reste des tourbillons. Les deux vortex fusionnent ainsi rapidement en une

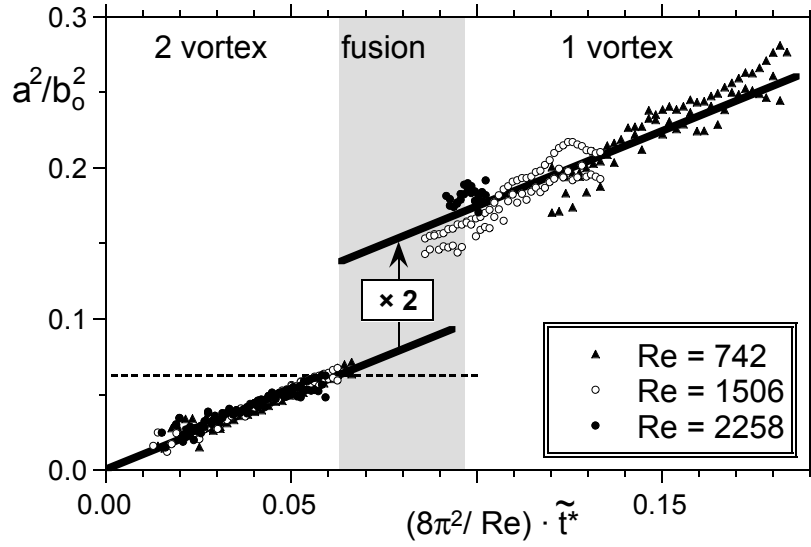


FIG. 4.7 – Evolution temporelle de la taille des cœurs des vortex en fonction du temps visqueux. La croissance visqueuse des tourbillons Gaussiens, dictée par la formule (4.2), se traduit par des droites de pente 1 tracées par des lignes continues. Le temps  $\tilde{t}^*$  a été défini pour que la taille des cœurs s'annule en 0. La ligne pointillé correspond à  $a/b = 0.25$ .

seule structure formée de deux demi-cercles, qui se déforme légèrement pour ressembler au symbole chinois du Yin et du Yang (voir figure 4.1e). Au cours de cette fusion, les pointes extérieures des tourbillons initiaux sont éjectées radialement, puis s'enroulent autour de la structure finale à cause de la rotation différentielle.

On observe une évolution semblable sur les champs de vortacité : les pointes extérieures qui apparaissent à la transition entre la première et la deuxième phase sont éjectées radialement (figure 4.3d) et créent deux filaments de vortacité qui s'enroulent autour des deux tourbillons fusionnés. La figure 4.3(d) montre que les tourbillons ne possèdent pas exactement la même circulation, malgré les soins que nous avons pris dans le choix du mouvement des pales pour régler cette symétrie. Etant donné que la vortacité diffuse beaucoup plus vite que le colorant, les deux lobes de vortacité se lissent très rapidement en une unique distribution de vortacité au cœur du tourbillon, alors que les deux couleurs de colorant restent séparées pendant un temps très long.

Au cours de cette étape, la distance de séparation entre les tourbillons décroît rapidement, ce qui correspond au rapprochement des deux vortex. La durée de cette phase est environ égale à la moitié de la période de rotation de la paire  $t_c$  et semble indépendante du nombre de Reynolds. Cela prouve que le mécanisme de la fusion est essentiellement un phénomène convectif. Les résultats obtenus par Chen *et al.* (1999) sur le sillage d'une aile d'avion montrent aussi que les deux tourbillons fusionnent en la moitié de la période de rotation. Cependant, ils expliquaient que ce temps, qui leur paraissait trop court, était lié à des phénomènes tridimensionnels. Par notre approche

bidimensionnelle, nous montrons ainsi que le mécanisme de fusion est uniquement lié au champ de vitesse bidimensionnel, et qu'il n'est pas nécessaire d'avoir des effets tridimensionnels pour augmenter la vitesse de la fusion.

Dans la figure 4.6, les vortex fusionnent légèrement plus lentement au nombre de Reynolds de 2258. A ce nombre de Reynolds, nous avons observé l'apparition d'une légère instabilité tridimensionnelle, ce qui explique que la fusion soit plus lente. Contrairement à l'argument de Chen *et al.* (1999), la fusion semble être plus lente en présence de phénomènes tridimensionnels, bien qu'elle apparaisse plus tôt, comme nous le verrons dans le chapitre 5. Cela vient du fait que l'instabilité tridimensionnelle crée des filaments qui ne sont pas uniformes selon l'axe des tourbillons. Leur moment angulaire est donc moins important que s'il sont strictement bidimensionnels, et ils font se rapprocher les deux vortex plus lentement.

#### 4.1.4 Axisymétrisation du vortex final

Après ce réarrangement rapide de la vorticité en une seule distribution de vorticité, les filaments de vorticité et de colorant s'enroulent autour de la structure centrale à cause de la rotation différentielle. Ils créent ainsi une spirale de vorticité, visible sur la figure 4.3(e), et de colorant comme dans la visualisation de la figure 4.1(f)<sup>2</sup>. La spirale de colorant est bicolore, car elle est issue des deux tourbillons initiaux. La rotation différentielle enroule les spirales indéfiniment et rapproche entre eux les filets de colorant, qui se mélangent lorsque la distance entre les deux colorants est suffisamment petite. Ce mélange est légèrement visible sur les visualisations. La vorticité diffuse beaucoup plus vite que le colorant et les filaments de vorticité diffusent très rapidement en une distribution axisymétrique de vorticité. Ce processus a été très bien décrit par Melander & McWilliams (1987b).

Au cœur du tourbillon, l'écoulement est presque en rotation solide, car la taille du cœur est grande : le carré de la taille du vortex final vaut environ deux fois le carré de la taille des vortex initiaux, en faisant abstraction des évolutions visqueuses, comme indiqué par la figure 4.7. Cette valeur est discutée et comparée à différentes théories dans le paragraphe 4.4. Au cœur du tourbillon, les deux colorants restent donc dissociés pendant un temps très long, leur mélange étant très peu efficace. Par contre, la diffusion de la vorticité est suffisante pour que les deux lobes initiaux de vorticité se fondent en un seul lobe. Si le nombre de Reynolds était suffisamment élevé, les deux distributions ne pourraient pas être lissées par la diffusion visqueuse, et il resterait entre les deux tourbillons une bande étroite ne contenant pas de vorticité. Cette bande peut être considérée comme une bande de vorticité négative dans un écoulement en rotation solide. Melander *et al.* (1988) ont montré numériquement que cette bande s'enroule en une spirale et se fait donc étirer. Le fluide étant incompressible, la largeur de cette bande décroît, jusqu'à ce que la diffusion visqueuse soit suffisamment efficace pour lisser cette bande, ce qui donne de nouveau un tourbillon axisymétrique. Il est intéressant de voir que l'évolution du colorant ne correspond pas du tout à

2. La figure 4.1(f) n'a pas été obtenue dans la même expérience que les autres photos de la figure 4.1, mais elle est représentative de l'écoulement à cet instant de la fusion



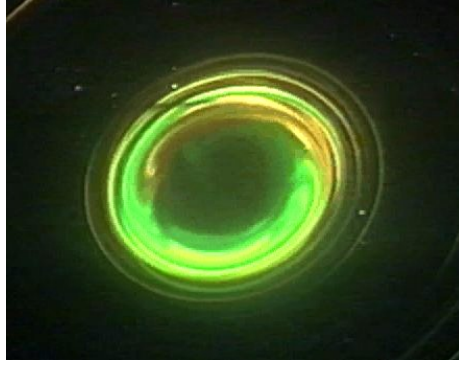


FIG. 4.8 – *Visualisation au colorant de la destruction du tourbillon final par l'écoulement axial qui entraîne le colorant en dehors de la tranche lumineuse :  $t^* \approx 3$ . Le nombre de Reynolds vaut 1506.*

l'évolution de la vorticité, même à très grand nombre de Reynolds, car la vorticité, contrairement au colorant modifie le champ de vitesse.

#### 4.1.5 Destruction du tourbillon final

Dans notre expérience, les tourbillons mesurent environ 1 mètre de long. Ils ne sont pas stables sur toute leur longueur. Les tourbillons possèdent à leur base une extrémité, ce qui crée un gradient vertical de vitesse azimutale. La dépression au cœur du tourbillon, qui est égale à  $-\int_0^\infty \rho v_\phi^2 / r \, dr$ , varie ainsi avec la hauteur. Cela crée une vitesse axiale en bas des tourbillons, qui se propage vers le haut, et qui détruit petit à petit le tourbillon. Dans la zone d'observation, les tourbillons sont donc bidimensionnels et sans vitesse axiale pendant environ une minute uniquement. Ensuite, une vitesse axiale apparaît d'abord au cœur des tourbillons, puis sur une zone de plus en plus large. Le colorant est entraîné vers le haut et quitte la tranche lumineuse, car il est disposé sur une hauteur finie. Le centre du tourbillon possède la vitesse axiale la plus grande, et va disparaître en premier. La destruction du tourbillon final prend la forme d'un trou noir, qui apparaît au cœur du tourbillon et qui grossit pour envahir tout le tourbillon, comme le montre la figure 4.8. Cette étape est intrinsèque à notre dispositif expérimental, et nous ne la mentionnerons plus par la suite.

## 4.2 Critère de fusion expérimental

Nous avons vu sur la figure 4.6 que la distance de séparation décroît doucement et de manière continue au début de la fusion. Il n'y a pas de point de départ de cette décroissance, qui soit clairement identifiable sur la courbe. La transition entre les deux phases décrites ci-dessus n'est pas très franche. Il est donc difficile de trouver un critère précis et objectif, qui détermine le début de la phase de fusion convective. En choisissant le début de la fusion à l'instant où la distance de séparation vaut 90% de sa valeur initiale par exemple, nous prenons un critère subjectif et forcément supérieur au critère réel, puisque la fusion a déjà démarré à cet instant.

Pourtant, un tel critère est d'une importance capitale dans l'étude de la dynamique d'écoulements tourbillonnaires. Il permet de déterminer si deux tourbillons, plongés dans un champ de vitesse, peuvent fusionner car ils passent suffisamment près l'un de l'autre, ou si ils ne se rapprochent jamais assez pour fusionner, et qu'ils continuent sur leurs trajectoires initiales. L'analyse combinée de sept expériences à différents nombres de Reynolds nous a permis de déterminer un critère de fusion d'une manière plus objective.

#### 4.2.1 Définition de l'origine des temps

L'origine des temps a été choisie au début du mouvement des pales pendant les expériences. Cependant, les vortex sont créés avec une taille de cœur non nulle, ce qui implique l'ajout d'une constante de temps  $t_0$  dans la formule (4.2). Il est aisé de redéfinir un nouveau temps

$$\tilde{t} = t - t_0 \quad (4.4)$$

translaté d'une valeur  $t_0$  par rapport à l'ancien temps. De cette manière, le carré de la taille des cœurs est proportionnelle au temps, indépendamment de sa valeur juste après l'enroulement spiral des nappes de vorticité. Dans ce référentiel de temps, l'évolution de la paire est indépendante du rapport initial  $(a/b)_0$ . En effet, le rapport  $a/b$  varie alors selon la loi 4.5, obtenue en introduisant le temps translaté  $\tilde{t}^*$ , dans l'Eq. (4.3) :

$$\left(\frac{a}{b_0}\right)^2 = \frac{8\pi^2}{Re} \tilde{t}^* \quad (4.5)$$

Cette évolution est très bien vérifiée dans la figure 4.7, dans laquelle les données des trois expériences se condensent avant la fusion sur une seule droite de pente 1 passant par l'origine.

Pour définir  $t_0$ , nous avons fait un fit des données par une droite de pente 1, pour chaque expérience.   tant donné qu'il y'a un grand nombre de points pour chaque expérience, l'erreur sur la détermination de  $t_0$  est faible. Le fit par moindres carrés donne une variance égale à  $10^{-3}$  sur la détermination de  $4\nu t_0/b_0^2$ , qui doit être comparée à la valeur critique de  $(a_c/b_0)^2$  donnée par 4.8. L'incertitude relative sur le critère de fusion, liée à la détermination de  $t_0$ , se trouve être faible et inférieure à 1%.

#### 4.2.2 Modèle à deux phases

Dans la première phase de l'interaction des tourbillons, l'évolution est essentiellement gouvernée par la croissance visqueuse des cœurs . En supposant que cette étape s'arrête lorsque le rapport  $a/b$  atteint un seuil critique égal à  $a_c/b_0$ , nous pouvons prédire à partir de (4.5) la durée  $\Delta\tilde{t}_1^*$  de cette phase, définie comme le temps nécessaire pour que le rapport  $a/b$  augmente d'une valeur nulle jusqu'au seuil critique  $a_c/b_0$  :

$$\Delta\tilde{t}_1^* = \left(\frac{a_c}{b_0}\right)^2 \frac{Re}{8\pi^2} = A Re \quad (4.6)$$

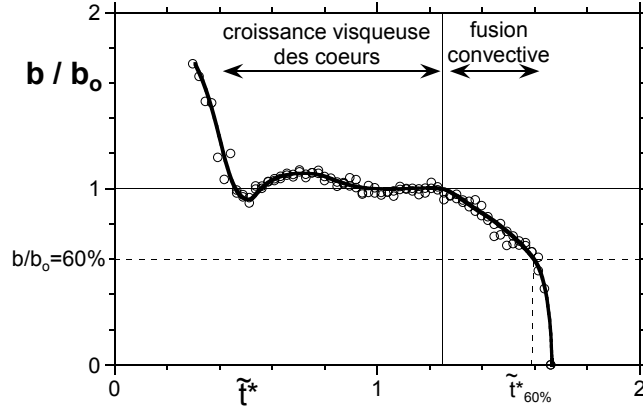


FIG. 4.9 – Schéma explicatif des deux premières phases de la fusion pour une distance de séparation égale à une fraction  $X=60\%$  de sa valeur initiale.

La durée de cette phase est donc proportionnelle au nombre de Reynolds dans les unités de temps convectives. Plus la diffusion agit lentement (c'est-à-dire plus le nombre de Reynolds est grand), plus il faut du temps pour arriver à la taille critique du cœur.

Dans la deuxième phase, nous avons vu sur la figure 4.6 que l'évolution de la distance de séparation dépend peu du nombre de Reynolds, dans une échelle de temps convective. Nous allons supposer que le temps nécessaire  $\Delta \tilde{t}_2^*$ , pour que  $b$  décroisse jusqu'à un pourcentage fixé  $X$  de sa valeur initiale  $b_0$ , est indépendant du nombre de Reynolds. La durée de la deuxième étape est donc une constante  $\Delta \tilde{t}_2^* = B_X$ , qui ne dépend que de la limite  $X$  que l'on s'impose.  $X$  est une valeur subjective, que nous allons faire varier pour obtenir un critère objectif.

En ajoutant la durée des deux étapes, on trouve le temps  $\tilde{t}_X^*$  qu'il faut pour que les deux vortex initialement de taille nulle, fusionnent jusqu'à une distance de séparation égale à  $X\%$  de sa valeur initiale (voir figure 4.9) :

$$\tilde{t}_X^* = A Re + B_X \quad (4.7)$$

La mesure expérimentale de ce temps de fusion  $\tilde{t}_X^*$  est tracée dans la figure 4.10 pour une fraction  $X = 60\%$ , pour sept expériences différentes. La variation est effectivement linéaire en fonction du nombre de Reynolds, ce qui valide notre modèle à deux phases pour l'interaction de deux tourbillons corotatifs.

Nous pouvons ensuite facilement calculer le rapport critique  $a_c/b_0$  au dessus duquel la fusion débute, car il est relié à la pente  $A$  au moyen de l'équation (4.6). En fittant par des moindres carrés la courbe de la figure 4.10, nous obtenons une valeur de la pente  $A$  avec une incertitude de 5%. Le rapport critique a été évalué pour différentes fractions  $X$ , et les résultats sont tracés dans la figure 4.11. Le rapport critique  $a_c/b_0$  varie légèrement avec la fraction  $X$  choisie, mais cette variation est de l'ordre de l'incertitude expérimentale. Grâce à ces mesures, un critère de fusion expérimental peut

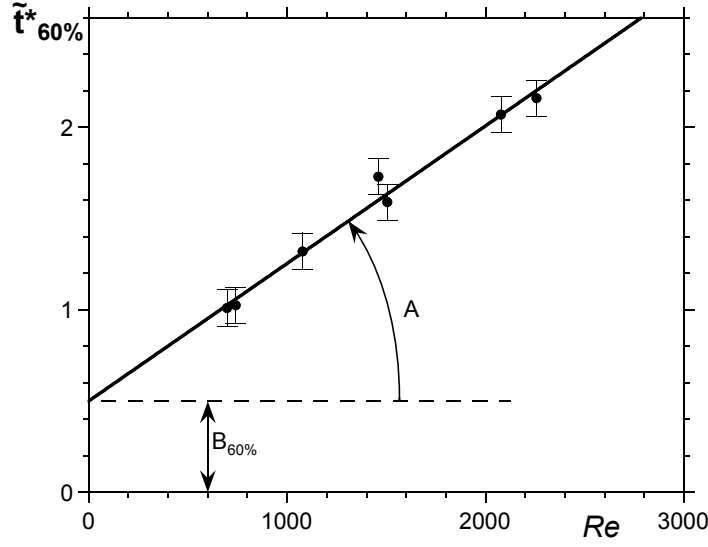


FIG. 4.10 – Temps de fusion en fonction du nombre de Reynolds. La ligne droite correspond à la formule (4.7) pour  $A = 7.5 \cdot 10^{-4}$  et  $B_{60\%} = 0.50$ .

être établi, pour deux tourbillons corotatifs symétriques, possédant une distribution Gaussienne de vortacité : la fusion débute lorsque la taille du cœur adimensionnée  $a/b_0$  dépasse une valeur critique donnée par

$$\frac{a_c}{b_0} = 0.244 \pm 0.010 \quad (4.8)$$

Cette valeur critique est légèrement plus faible que la valeur que l'on peut obtenir en regardant la taille des cœurs au moment où la distance de séparation commence à baisser. Nous avons utilisé cette technique, qui est plus subjective, dans un article publié dans *Physics of Fluids* (Meunier & Leweke 2001a), et nous avons trouvé un rapport critique égal à  $a_c/b_0 = 0.26 \pm 0.01$ , qui est effectivement supérieur. La nouvelle valeur du rapport critique est cependant très proche de cette ancienne valeur et peut être considérée comme une correction au résultat antérieur, car il a été obtenu d'une manière plus objective et non biaisée.

#### 4.2.3 Comparaison avec les études précédentes

Dans la littérature, la fusion de deux tourbillons a été étudiée de manière extensive dans le cas de deux patches de vortacité. Il a été trouvé numériquement un rapport critique, au delà duquel les deux tourbillons fusionnent, égal à  $(a_R/b)_c = 0.315$ , qui n'est pas en accord avec notre résultat expérimental. Mais pour des patches, la taille du cœur est définie en utilisant la surface  $A$  du patche :  $a_R = \sqrt{A/\pi}$ . Cela correspond, pour un vortex circulaire, au rayon où la vitesse azimutale est maximale. Dans le cas d'un vortex Gaussien, la vitesse azimutale est maximale à une distance  $a_{\max} = 1.12 a$  du centre, ce qui donnerait un critère de fusion légèrement plus élevé que celui donné dans (4.8). On voit ici apparaître un problème lié à la définition de la taille

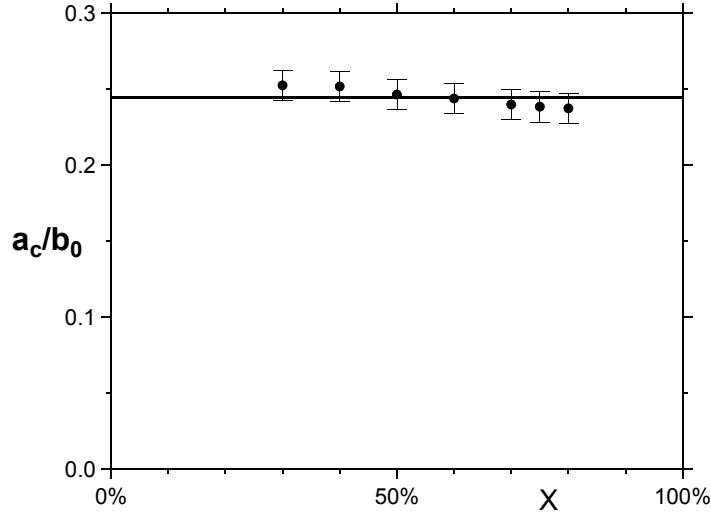


FIG. 4.11 – Critère de fusion expérimental obtenu en modélisant le temps de fusion, pour différents rapports  $X$  de la distance de séparation adimensionnée.

du cœur : le rapport critique dépend de la définition de la taille du cœur, qui est choisie arbitrairement pour chaque profil de vortacité.

Nous avons montré dans une publication soumise à *Physics of Fluids* sous le titre “A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices” (Meunier *et al.* 2001b) comment définir la taille du cœur pour obtenir un critère de fusion indépendant du profil de vortacité. Une version de cet article est mise en annexe.

Si le moment angulaire du vortex 1 est défini par :

$$J_1 = \frac{1}{\Gamma_1} \int_{\text{vortex1}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)^2 \omega dS \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{\Gamma_1} \int_{\text{vortex1}} \mathbf{r} \omega dS \quad (4.9)$$

on peut alors utiliser une taille de cœur pour le vortex 1 :

$$a_1 = \frac{\sqrt{J_1}}{\Gamma_1} \quad (4.10)$$

Cette définition donne une mesure quantitative de l’étendue spatiale de la distribution de vortacité. Pour un vortex Gaussien, cette définition est équivalente à celle utilisée dans les expériences, car le moment angulaire d’un vortex Gaussien de paramètre  $a$  et de circulation  $\Gamma$  vaut exactement  $\Gamma a^2$ . Le critère expérimental (4.8) reste ainsi identique pour cette définition de  $a$ . Par contre, le moment angulaire d’un vortex de Rankine de rayon  $a_R$  et de circulation  $\Gamma$  vaut  $\Gamma a_R^2/2$ . Il faut donc diviser le critère donné au début de ce paragraphe par  $\sqrt{2}$  pour pouvoir le comparer à notre critère expérimental. Cela donne un critère pour des patches de vortacité :

$$\left(\frac{a}{b}\right)_c = 0.223 \quad (4.11)$$

Ce résultat est assez proche du critère de l’équation (4.8) trouvé expérimentalement.

Nous avons de plus montré que le critère de fusion qui utilise cette définition de la taille du cœur varie peu en fonction du profil de vortacité. Pour cela, nous avons utilisé un code élaboré par Uwe Ehrenstein (Ehrenstein & Rossi 1999), qui permet de trouver des solutions stationnaires non-visqueuses possédant un profil continu de vortacité. Notre étude a porté sur une famille de vortex qui sont des patches de vortacité non uniforme, de profil parabolique. A l'extérieur de ces patches, la vortacité est nulle. En faisant varier la courbure de la parabole, on passe continûment d'un patche de vortacité uniforme à un vortex parabolique dont la vortacité tend vers 0 sur la frontière du patche. Pour chaque profil de vortacité, il existe une solution lorsque les vortex sont suffisamment éloignés. Quand on tente de rapprocher les deux vortex, le code devient instable et ne converge plus en dessous d'une distance de séparation critique. La distance minimale  $b_c$  est mesurée entre les deux centroïdes des vortex, ce qui détermine un rapport critique de stabilité  $a/b_c$ . Si la taille du cœur  $a$  est définie en utilisant la surface du patche, le critère de fusion dépend beaucoup du profil de vortacité. Au contraire, si  $a$  est défini au moyen du moment angulaire comme dans l'Eq. (4.10), le critère de fusion varie très peu pour toute la famille de vortex paraboliques<sup>3</sup> :

$$\frac{a}{b_c} = 0.218 \pm 0.010 \quad (4.12)$$

Ce critère est proche de celui trouvé expérimentalement dans l'Eq. (4.8). Il semble donc qu'en définissant la taille du cœur par le moment angulaire, il est possible d'obtenir un critère de fusion universel, ne dépendant pas du profil de vortacité.

Les modélisations numériques précédentes ont aussi été effectuées pour des vortex possédant un profil Gaussien. On s'attend à retrouver le résultat expérimental lorsque la surface du patche est très grande devant le paramètre de la Gaussienne, afin que la discontinuité de vortacité sur la frontière du patche soit la plus petite possible. Cependant, la méthode numérique n'autorise pas les deux vortex à se superposer. La distance minimale entre les deux tourbillons est donc supérieure au diamètre des patches, et tend vers l'infini lorsque la surface du patche tend vers l'infini. En faisant des patches de plus en plus large, on ne retrouve pas le résultat expérimental, mais on fait tendre le rapport critique  $a/b_c$  vers 0.

Ainsi, il apparaît que cette méthode numérique ne permet pas de trouver la valeur exacte du critère de fusion. Par contre, elle permet de trouver des solutions stables contenant deux vortex pour un  $a/b$  donné. Le rapport critique  $a/b_c$  trouvé par cette méthode est donc simplement une borne inférieure au critère de fusion véritable. Le critère de fusion obtenu expérimentalement semble être un bon candidat pour un critère universel, puisqu'il est effectivement légèrement au dessus de la valeur donnée par cette méthode numérique.

---

3. la famille de vortex paraboliques contient comme cas limite les patches de vortacité uniforme, c'est-à-dire le critère donné dans (4.11)

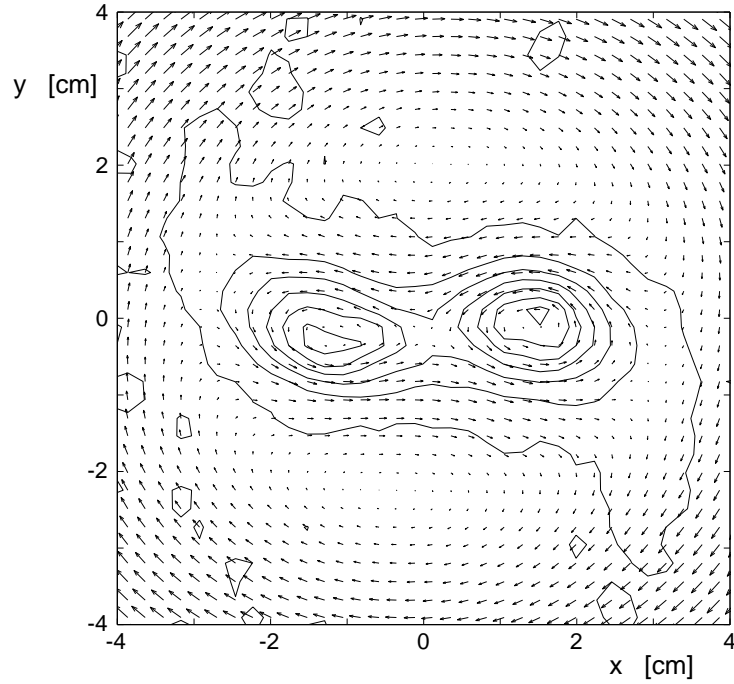


FIG. 4.12 – *Champ de vitesse dans le repère tournant avec les tourbillons. Les contours de vorticité sont tracés en traits pleins et sont séparés de  $1 \text{ s}^{-1}$ . L'expérience correspond au nombre de Reynolds de 1506 dans la figure 4.6, pour  $t^* = 1.12$ , c'est-à-dire au début de la fusion.*

### 4.3 Critère de fusion théorique

Dans cette partie, nous explicitons un mécanisme physique simple qui explique la fusion des deux tourbillons et nous décrivons un modèle simplifié s'appuyant sur ce mécanisme.

#### 4.3.1 Rôle des filaments de vorticité

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1 que des filaments de vorticité apparaissent à la fin de la première étape et qu'ils semblent coïncider avec la transition entre les deux étapes. Quel est le rôle exact de ces filaments dans la fusion? Ont-ils une part active dans le phénomène de la fusion?

Il est communément admis que ces filaments apparaissent pour permettre la conservation du moment angulaire. Le raisonnement classique tient au fait que si les deux vortex se rapprochent, il faut éjecter de la vorticité loin du centre de la paire pour conserver le moment angulaire. C'est le rôle que jouent ces filaments, qui est un rôle entièrement passif. Le problème de ce raisonnement est qu'il n'y a pas d'explication au fait que les deux vortex se rapprochent, qui est pris comme une constatation.

Pourtant, il est très facile d'expliquer l'apparition de ces filaments au lieu d'expliquer le rapprochement des deux vortex. Pour cela, il suffit d'ana-

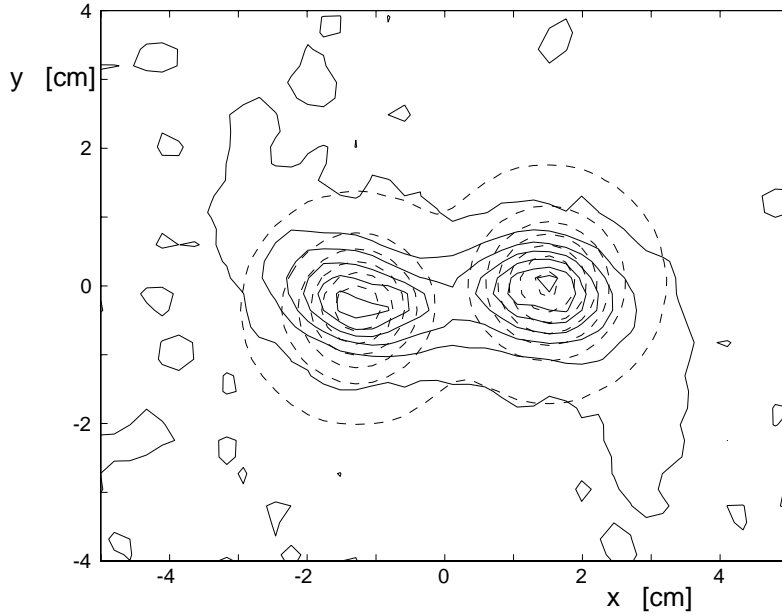


FIG. 4.13 – *Champ de vorticité des deux vortex pour un nombre de Reynolds de 1506 à  $t^* = 1.12$ . Les contours de vorticité sont tracés en traits pleins et sont séparés de  $1 \text{ s}^{-1}$ . Les traits pointillés correspondent au mêmes contours de vorticité, obtenu pour le champ de deux vortex Gaussiens axisymétriques, de mêmes circulations et de mêmes tailles de cœur.*

lyser le champ de vitesse dans le repère tournant avec les deux tourbillons, qui est montré dans la figure 4.12. La vorticité qui est proche des cœurs tourne autour des vortex sans s'en éloigner. Les contours de vorticité sont ici proches des lignes de courant, indiquant que la vorticité s'est uniformisée le long des lignes de courant. Par contre, la vorticité qui est sur les lignes de courant extérieures est éjectée, ce qui crée les filaments de vorticité. Cela est bien visible dans la figure 4.12, où le champ de vitesse semble étirer ces filaments. Lorsque la taille des cœurs grossit par diffusion visqueuse, les filaments de vorticité deviennent de plus en plus importants. En prenant le raisonnement symétrique du paragraphe précédent, nous pouvons dire que, pour conserver le moment angulaire, les deux vortex doivent se rapprocher lorsque les filaments éjectent de la vorticité loin du cœur. En fait, c'est un cercle vicieux : les filaments grossissent, ce qui fait se rapprocher les deux vortex, accélérant la formation des filaments, ce qui fait se rapprocher les deux vortex... Il est donc difficile de dire quel est le phénomène qui arrive en premier (le rapprochement des vortex ou l'éjection des filaments), puisque les deux sont complètement liés.

Pour comprendre de manière plus intuitive le rôle de ces filaments de vorticité, nous avons calculé le champ de vitesse créé par la vorticité contenue dans les filaments, indiqué dans la figure 4.14. Pour cela, nous avons enlevé la vorticité  $\omega_{\text{fit}}$  de deux tourbillons Gaussiens de même taille de cœurs ( $a_1 = a_2 = 0.83 \text{ cm}$ ) et de mêmes circulations ( $\Gamma_1 = 14.4 \text{ cm}^2/\text{s}$  et



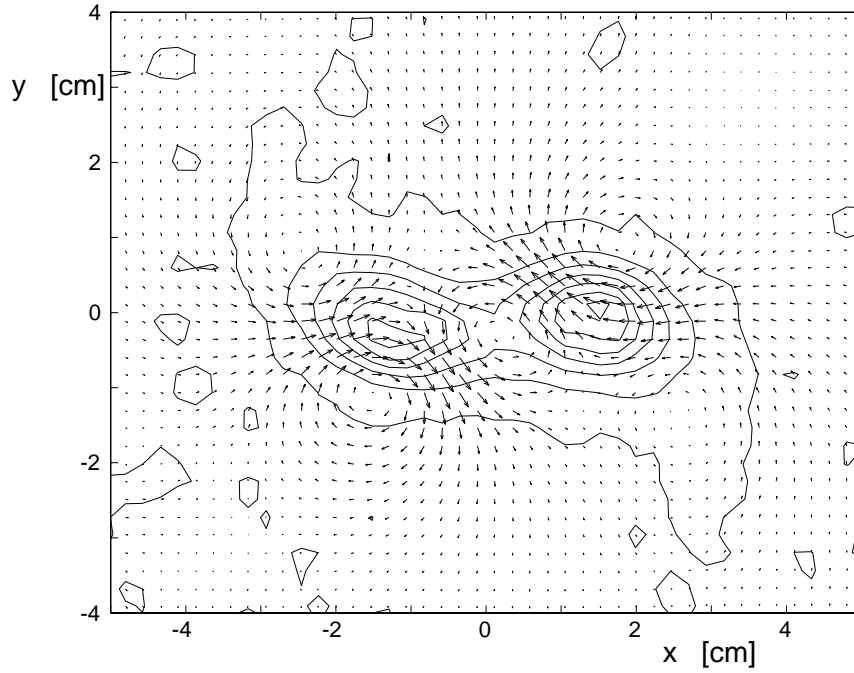


FIG. 4.14 – Champ de vitesse créé par les filaments de vorticité, qui sont définis comme la différence entre la vorticité totale et la vorticité de deux vortex axisymétriques Gaussiens (tracés dans la figure 4.12). Les contours de vorticité du champ total sont tracés en traits pleins et sont séparés de  $1 \text{ s}^{-1}$ . L'expérience correspond au nombre de Reynolds de 1506 dans la figure 4.6, pour  $t^* = 1.12$ , c'est-à-dire au début de la fusion.

$\Gamma_2 = 13.2 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) au champ de vorticité total  $\omega$ . La différence entre les deux champs  $\omega - \omega_{\text{fit}}$  contient de la vorticité essentiellement dans les filaments. Cela est bien visible sur la figure 4.13. Pour obtenir le champ de vitesse correspondant à cette vorticité, on utilise la formule de Biot-Savart :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^2} dS \quad (4.13)$$

Dans cette formule,  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire selon la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement. Il est clairement visible sur la figure 4.14 que ce champ de vitesse tend à rapprocher les deux vortex. La vitesse maximale du champ créé par les filaments est environ 25% de la vitesse azimutale maximale des vortex. Les deux tourbillons ont ainsi tendance à se rapprocher relativement vite, ce qui explique que la fusion s'effectue très rapidement, c'est-à-dire en environ une demi-période de rotation de la paire. Le champ de vitesse des filaments semble contenir un tourbillon au milieu entre les vortex. Cela ne provient pas de la vorticité des filaments, mais de la vorticité qui est présente au centre de l'écoulement, liée au fait que les vortex sont légèrement elliptiques.

En fait, le champ de vitesse qui tend à rapprocher les deux vortex, provient de la dissymétrie de la distribution de vorticité par rapport à la ligne joignant les deux vortex (dissymétrie haut/bas dans la figure 4.13). En effet, la partie symétrique de la vorticité crée un champ de vitesse antisymétrique,

qui ne possède pas de composante parallèle sur la ligne joignant les deux vortex. Par contre, la partie antisymétrique de la vorticité, qui est constituée des filaments de vorticité, crée un champ de vitesse symétrique, qui ressemble dans le cas de la figure 4.13 à un écoulement hyperbolique, comprimant la direction (Ox) et étirant la direction (Oy). C'est donc la partie antisymétrique de la vorticité qui a tendance à rapprocher les deux vortex. Cette antisymétrie vient de la présence des points hyperboliques extérieurs  $H_1$  et  $H_2$  dans la figure 4.15. Les lignes de courant étant symétriques, la dissymétrie ne peut survivre que de manière instationnaire, c'est-à-dire pendant un temps court devant le temps convectif. En effet, la vorticité qui est éjectée d'un vortex vient ensuite se coller autour du vortex opposé. C'est pourquoi un modèle théorique doit prendre en compte les phénomènes convectifs pour pouvoir expliquer la déstabilisation de la paire.

En conclusion, cette explication physique de la fusion est en accord avec l'observation faite par Melander *et al.* (1988) qui ont montré qu'il peut exister de la vorticité dans la bande d'échange, entre la ligne de courant qui arrive au point hyperbolique central et la ligne qui passe par les points hyperboliques extérieurs (voir la figure 4.15). Ils ont précisé que la fusion s'amorce dès que la vorticité dépasse la ligne de courant passant par le point hyperbolique extérieur. Par contre, cette explication montre que les méthodes numériques qui recherchent des solutions d'Euler ne peuvent obtenir le véritable critère de fusion, car elles supposent qu'il n'y a pas de vorticité dans cette bande d'échange. C'est pourquoi ces méthodes numériques ne donnent qu'une borne inférieure au critère de fusion, et non une valeur exacte du critère de fusion.

#### 4.3.2 Un modèle théorique simple

Dans ce paragraphe, nous essayons de montrer que le mécanisme explicité précédemment peut créer une déstabilisation de la paire et mène effectivement à la fusion des deux vortex.

Nous supposons que les lignes de courant cr  es par les deux vortex sont toujours égales aux lignes de courant de deux vortex ponctuels, afin de pouvoir effectuer des calculs. Cette hypothèse n'est pas drastique, car les lignes de courant varient peu au cours de la première étape. La figure 4.15 indique que la topologie des lignes de courant de deux vortex ponctuels est très proche de celle des lignes de courant de l'écoulement au moment de la fusion, dont un exemple est donné dans la figure 4.12. Cette ressemblance a été très bien démontrée par des simulations numériques bidimensionnelles faites par Le Dizès & Verga (2001). Nous utiliserons donc la fonction courant  $\Psi$  de deux tourbillons ponctuels de circulation  $\Gamma$ , séparés par une distance  $b$ , dans le repère tournant :

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{b}/2| + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |\mathbf{r} + \mathbf{b}/2| - \frac{\Gamma r^2}{2\pi b^2} \quad (4.14)$$

Dans cette formule,  $\mathbf{b}$  représente le vecteur qui joint les deux centres des vortex.

Nous supposons de plus que la viscosité est suffisamment faible pour que la vorticité soit uniforme sur chaque ligne de courant, car elle est advectée

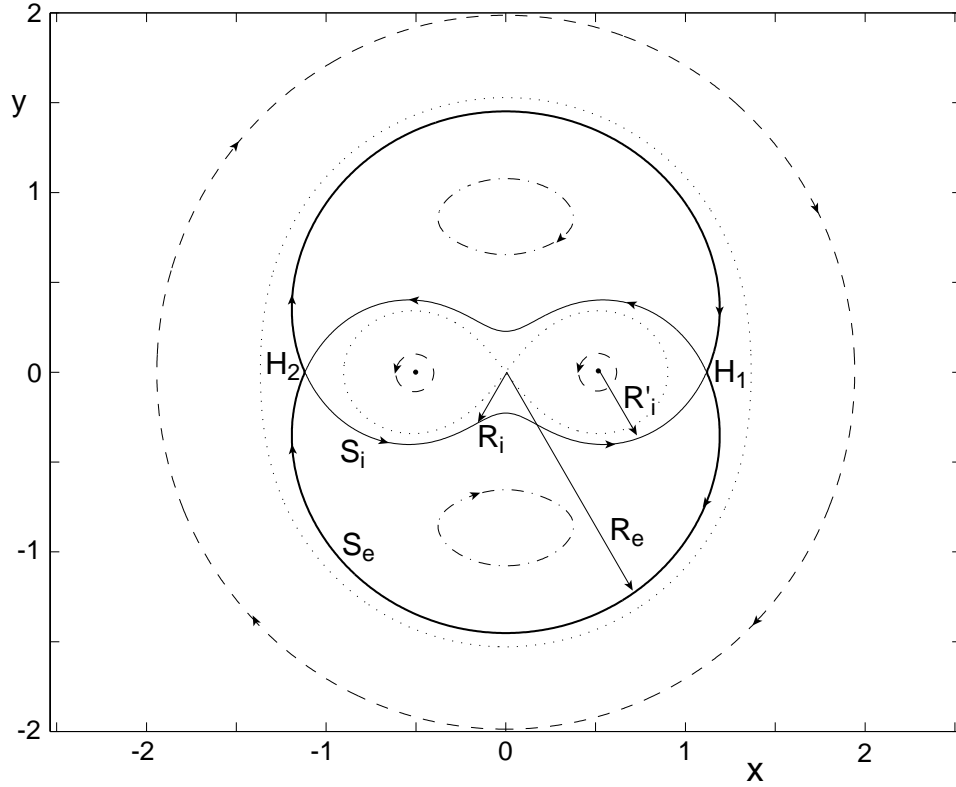


FIG. 4.15 – Lignes de courant de deux vortex ponctuels dans le repère tournant avec la paire, séparés par une distance  $b = 1$ . Les lignes correspondent aux contours de la fonction courant  $\psi$ , définie par la formule (4.14), pour  $\Psi/\Gamma = -0.4$  (ligne discontinue),  $\Psi/\Gamma = -\ln 2/\pi$  (ligne en points),  $\Psi/\Gamma = -5/8\pi$  (ligne continue), et  $\Psi/\Gamma = -0.13$  (traits mixtes).

suffisamment vite par le champ de vitesse pour s'uniformiser sans que la diffusion n'ait le temps d'agir. Des calculs numériques de Stéphane Le Dizès montrent que cette hypothèse est vérifiée, sauf dans des zones proches des points hyperboliques. Mais la taille de ces zones diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente, ce qui réduit leur effet. Dans une première étape, nous allons regarder des variations suffisamment lentes de  $b$  pour que cette hypothèse reste valable.

Enfin, pour pouvoir donner des valeurs approximatives des circulations dans les différentes zones, nous supposons que le profil de vorticité perpendiculaire aux lignes de courant est proche d'une distribution Gaussienne, et que la taille des cœurs croît sous l'effet de la diffusion comme :

$$a^2 = 4\nu t \quad (4.15)$$

c'est- dire que l'on a pris l'origine du temps pour que la taille des cœurs soit nulle à  $t = 0$ .

Dritschel (1985) a montré que dans un écoulement bidimensionnel vis-

queux, le moment d'ordre deux de la vorticité,

$$J = \iint r^2 \omega dS \quad (4.16)$$

initialement égal à  $J_0$ , croît avec le temps sous l'effet de la viscosité cinématique  $\nu$  selon :

$$J(t) = J_0 + 4\nu\Gamma_{\text{tot}} t \quad (4.17)$$

Ici,  $\Gamma_{\text{tot}}$  correspond à la circulation totale présente dans l'écoulement. Saffman (1992, paragraphe 3.3.5) montre que ce moment de la vorticité est opposé au moment cinétique du fluide, c'est pourquoi il augmente alors que le moment cinétique décroît. Par la suite, nous appellerons  $J$  le moment angulaire, bien qu'il soit opposé au moment cinétique.

Dans le cas de deux tourbillons corotatifs de circulation  $\Gamma$ , et initialement ponctuels et séparés d'une distance  $b_0$ , le moment est donc égal à :

$$J(t) = 2J_i(t) = \Gamma \frac{b_0^2}{2} + 8\nu\Gamma t \quad (4.18)$$

Au début de la première étape de la fusion, les vortex sont quasi-ponctuels et presque axisymétriques. Le moment angulaire du vortex 1 est donc égal, au premier ordre à :

$$J_1 = \int \mathbf{r}^2 \frac{\Gamma}{\pi a^2} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{b}/2)^2}{a^2}} dS \quad (4.19)$$

En faisant le changement de variable  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}/2$ , on calcule aisément ce moment angulaire :

$$J_1 = \Gamma \frac{b^2}{4} + \Gamma a^2 \quad (4.20)$$

En utilisant la forme de la taille du cœur (4.15), on trouve alors une forme explicite du moment angulaire total :

$$J(t) = \Gamma \frac{b^2}{2} + 8\nu\Gamma t \quad (4.21)$$

En comparant les Eqs. (4.18) et (4.21), on trouve que la distance de séparation reste égale à sa valeur initiale. Cela veut dire que la croissance de la taille des cœurs n'a aucun effet au premier ordre sur la distance de séparation.

Lorsque les tourbillons deviennent plus gros, une partie de la vorticité va arriver jusqu'à la ligne de courant intérieure qui relie les points hyperboliques  $H_1$  et  $H_2$ . Cette séparatrice est appelée  $S_i$  sur la figure 4.15, et est dessinée en trait continu fin. La vorticité qui se trouve sur cette ligne de courant va alors se répartir sur la séparatrice extérieure  $S_e$ , qui passe aussi par les deux points hyperboliques, et qui est tracée en trait continu gras sur la figure 4.15. Cela crée les filaments de vorticité mentionnés dans le paragraphe précédent. On peut modéliser ce changement en rajoutant au moment angulaire total le moment angulaire  $J_e$  des filaments qui a été créé sur la séparatrice extérieure :

$$J(t) = \Gamma \frac{b^2}{2} + 8\nu\Gamma t + J_e \quad (4.22)$$

Il suffit donc de modéliser la valeur du moment angulaire  $J_e$  pour connaître la valeur de  $b$ .

Nous modélisons la vortacité qui se trouve sur la séparatrice  $S_e$  comme un filament de vortacité d'épaisseur  $\delta$ , et de vortacité constante égale à la vortacité  $\omega_i$  sur la séparatrice intérieure  $S_i$ . En effet, les deux séparatrices correspondent à la même valeur de la fonction courant et elles possèdent donc la même vortacité. Le moment angulaire des deux filaments est alors égal à :

$$J_e = 2 \int_0^\pi R_e^2(\theta) \omega_i \delta R_e(\theta) d\theta \quad (4.23)$$

où  $R_e(\theta)$  est la distance du centre du système à la ligne de courant  $S_e$  (voir la figure 4.15). L'épaisseur  $\delta$  des filaments est proportionnelle à la taille des cœurs  $a$ , car elle est liée au profil de vortacité perpendiculairement aux lignes de courant, qui est proportionnel à  $\exp(-r^2/a^2)$ . Nous définissons ainsi une constante adimensionnée  $\alpha$  qui donne la taille des filaments :

$$\delta = \alpha a \quad (4.24)$$

Le moment de la vortacité sur la ligne extérieure est donc égal à :

$$J_e = 2\pi \langle R_e^3 \rangle \alpha a \omega_i \quad (4.25)$$

$\langle R_e^3 \rangle$  est la valeur moyenne du cube de la distance du centre du système à  $S_e$ , et peut être calculé numériquement pour les lignes de courant de deux vortex ponctuels :

$$\langle R_e^3 \rangle = \widetilde{R}_e^3 b^3 \quad \text{avec} \quad \widetilde{R}_e^3 = 2.5312 \quad (4.26)$$

Enfin, nous modélisons la vortacité  $\omega_i$  en supposant que le profil de chaque vortex est proche d'un profil Gaussien. La vortacité sur la ligne de courant intérieure est donc égal à la vortacité lorsque on se place à la distance  $R'_i$  d'un des vortex. Nous la modélisons par :

$$\omega_i = \frac{\Gamma}{\pi a^2} e^{-R_i'^2/a^2} \quad (4.27)$$

Dans cette formule,  $R_i'^2$  correspond à la valeur moyenne du carré de la distance de  $S_i$  au centre d'un vortex, moyenné sur un demi-plan uniquement. Pour les lignes de courant de deux vortex ponctuels, cette valeur est proportionnelle à  $b^2$  et vaut :

$$\langle R_i'^2 \rangle = \widetilde{R}_i'^2 b^2 \quad \text{avec} \quad \widetilde{R}_i'^2 = 0.2218 \quad (4.28)$$

On définit un moment angulaire restreint, auquel on a retranché les effets visqueux :

$$\hat{J} = J(t) - 8\nu\Gamma t \quad (4.29)$$

D'après l'Eq. (4.18), ce moment reste constant au cours du temps et est égal à  $J_0 = \Gamma b_0^2/2$ . Il peut être calculé explicitement en fonction de  $b$  en utilisant les formules (4.22), (4.25) et (4.27) :

$$\hat{J}(b) = \Gamma b^2 \left\{ \frac{1}{2} + 2\alpha \widetilde{R}_e^3 \frac{b}{a} e^{-\widetilde{R}_i'^2 (b/a)^2} \right\} \quad (4.30)$$

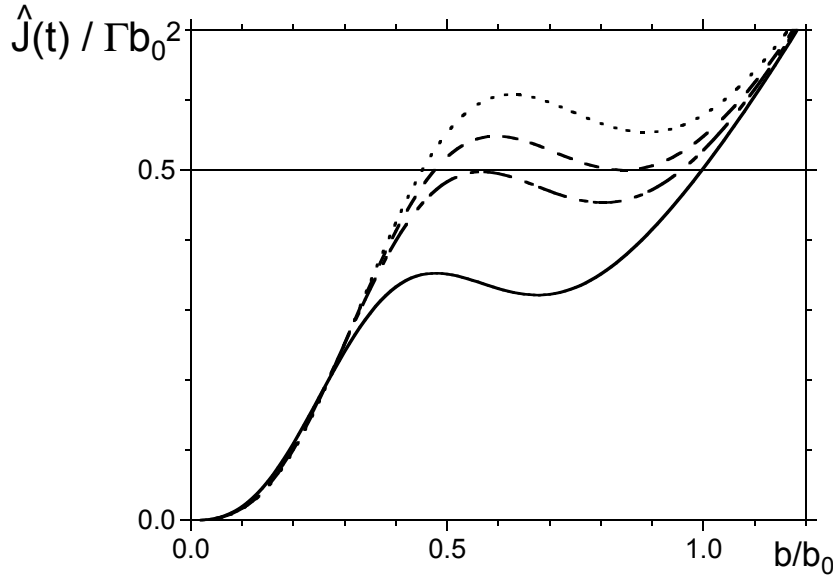


FIG. 4.16 – Moment angulaire restreint  $\hat{J}$  adimensionné par  $\Gamma b_0^2$  en fonction de la distance de séparation adimensionnée, calculé par la formule (4.30) avec  $\alpha = 0.5$ . La taille du cœur adimensionnée vaut  $a/b_0 = 0.16$  (ligne continue),  $a/b_0 = 0.19$  (traits mixtes),  $a/b_0 = 0.1995$  (ligne discontinue) et  $a/b_0 = 0.21$  (ligne en points).

Cette fonction est tracée dans la figure 4.16 pour une épaisseur des filaments  $\delta$  choisie par  $\alpha = 0.5$ . Pour chaque valeur de  $a/b_0$ , la distance de séparation  $b$  est obtenue à l'intersection de cette courbe avec la droite horizontale  $\hat{J}/\Gamma b_0^2 = 1/2$ . On voit donc que la distance de séparation diminue légèrement lorsque la taille des cœurs augmente : elle a baissé de 4% pour une taille du cœur  $a/b_0 = 0.19$ . Cette diminution s'effectue sur une échelle de temps visqueuse (liée à la croissance de  $a$ ). Cela ne correspond pas à ce que nous avons observé, qui était une chute rapide de  $b$ , suivant le temps convectif. Ce comportement est simplement une adaptation du système de deux vortex à la présence de filaments de vortacité.

Par contre, nous allons montrer dans le paragraphe suivant que lorsque le minimum de cette courbe dépasse la valeur  $1/2$ , le système devient instable de manière convective, et la distance de séparation saute jusqu'à la deuxième intersection de la courbe avec la droite horizontale, qui se trouve à  $b/b_0 = 0.48$ . Cela se produit pour  $a/b_0 = 0.1995$  alors que la distance de séparation a déjà diminué de 15%.

Le résultat précédent a été obtenu à l'aide de nombreuses hypothèses et au moyen de plusieurs modélisations numériques (de  $J_e$  et de  $\omega_i$  par exemple). Cependant, le raisonnement que nous effectuons sur la courbe est très général et suppose simplement que la fonction  $\hat{J}$  possède un minimum qui se translate vers le haut lorsque la taille des cœurs  $a$  augmente. C'est pourquoi nous pensons que ce modèle théorique est toujours valide lorsque les hypothèses ne sont plus vérifiées, même si le calcul n'est plus possible de

manière exacte.

Néanmoins, il est possible de montrer que la courbe  $\hat{J}$  ne possède un maximum que lorsque :

$$2\alpha\widetilde{R}_e^3 > \widetilde{R}_i' \frac{e^{3/2+\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3(3+\sqrt{6})}} \quad (4.31)$$

ce qui est le cas uniquement si  $\alpha > 0.3509$ . Pour de valeurs inférieures, la courbe de  $\hat{J}$  est croissante et il n'est pas possible de trouver un endroit où le système de deux vortex va devenir instable. Cela veut dire que si la taille des filaments est trop petite ( $\alpha$  trop faible), le moment angulaire des filaments n'est pas suffisamment important pour créer une fusion convective, ce qui est en accord avec le mécanisme physique. On s'attend alors à ce que les deux tourbillons fusionnent suivant un temps visqueux. Cependant, l'expérience indique clairement qu'il existe une étape convective, ce qui tendrait à prouver que  $\alpha$  est supérieur à 0.35 dans l'expérience.

#### 4.3.3 Déstabilisation convective de la paire

Nous avons supposé dans le paragraphe précédent que les variations de la distance de séparation étaient suffisamment lentes pour que la vorticité soit toujours uniformisée le long des lignes de courant. Nous supposons maintenant que la vorticité n'a pas le temps de parcourir toute la ligne de courant pendant le temps typique de variation de  $b$ . La vorticité est donc advectée par l'écoulement. Nous supposons que la vitesse angulaire le long de la ligne de courant  $S_e$  est constante, égale à  $\Omega'$ . Cette valeur semble être de l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire  $\Omega = \Gamma/\pi b^2$  de la paire de tourbillons.

Le moment angulaire des filaments peut être calculé en utilisant l'équation (4.23) où l'on remplace la vorticité  $\omega_i$  par la vorticité  $\omega_e(\theta, t)$    un instant  $t$  et à un angle  $\theta$ , sur la séparatrice extérieure :

$$J_e = 2 \int_0^\pi R_e^2(\theta) \omega_e(\theta, t) \delta R_e(\theta) d\theta \quad (4.32)$$

Cette vorticité est égale à la vorticité qui était sur la séparatrice intérieure un instant  $T$  plus tôt. Ce retard  $T$  correspond au temps que met la vorticité pour atteindre l'angle  $\theta$  depuis le point hyperbolique, et est égal à :  $T = \theta/\Omega'$ . On néglige ici le temps que met la vorticité pour s'uniformiser sur la séparatrice intérieure, car sa longueur est plus faible que celle de la séparatrice extérieure. La vorticité à un angle  $\theta$  de la séparatrice extérieure est donc égal à :

$$\omega_e(\theta, t) = \omega_i(t - T) = \omega_i\left(t - \frac{\theta}{\Omega'}\right) = \omega_i - \frac{\theta}{\Omega'} \frac{d\omega_i}{dt} + O(1/\Omega'^2) \quad (4.33)$$

Nous avons effectué un développement limité de  $\omega_i$  en supposant que  $T$  est faible devant les variations temporelles de  $\omega_i$ . En utilisant la forme de  $\omega_i$  donnée par (4.27), nous explicitons  $J_e$  selon :

$$J_e = 2\pi \langle R_e^3 \rangle \alpha a \omega_i \left( 1 + \lambda \frac{b\dot{b}}{a^2} \right) \quad (4.34)$$

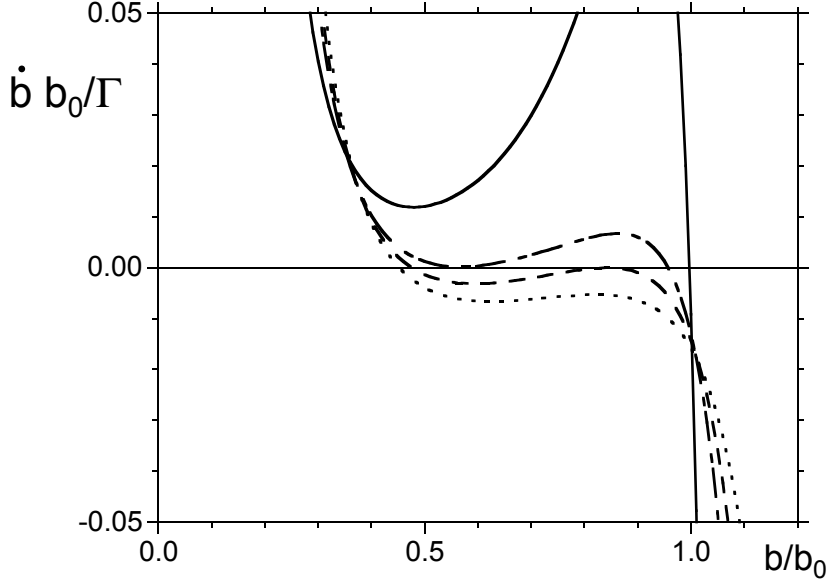


FIG. 4.17 – Vitesse de séparation  $\dot{b}$ , adimensionnée par  $\Gamma/b_0$ , calculée par la formule (4.36) avec  $\alpha = 0.5$ . La taille du cœur adimensionnée vaut  $a/b_0 = 0.16$  (ligne continue),  $a/b_0 = 0.19$  (traits mixtes),  $a/b_0 = 0.1995$  (ligne discontinue) et  $a/b_0 = 0.21$  (ligne en points).

$$\text{avec} \quad \lambda = \frac{4\widetilde{R}_i'^2 \int_0^\pi \theta R_e^3 d\theta}{\pi \Omega' < R_e^3 >} \quad (4.35)$$

C'est l'analogie de l'équation (4.25) avec un terme convectif contenant  $\dot{b}$ . Cela nous permet de calculer explicitement le moment restreint  $\hat{J}$ . En écrivant que ce moment restreint est égal à  $J_0 = \Gamma b_0^2/2$ , on obtient une équation différentielle sur  $b$  qui se met sous la forme :

$$\dot{b} = \frac{a^2}{\lambda b} \left[ \frac{a(1-b^2)}{4\alpha \widetilde{R}_e^3 b^3 \exp(-\widetilde{R}_i'^2 b^2/a^2)} - 1 \right] \quad (4.36)$$

La constante  $\lambda$  possède l'unité d'un temps, et peut être approximée par  $2.8 b_0^2/\Gamma$  en supposant que  $\Omega' = \Omega$  et que  $\int_0^\pi \theta R_e^3 d\theta = \pi < R_e^3 >$ . Cependant, la valeur numérique de  $\lambda$  est peu importante car la stabilité du système ne dépend que du signe de  $\dot{b}$ .

Les variations de  $\dot{b}$  sont tracées dans la figure 4.17 en utilisant la valeur précédente de  $\lambda = 2.8 b_0^2/\Gamma$  et  $\alpha = 0.5$ . On voit que si la taille du cœur adimensionnée  $a/b_0$  est faible, il existe une unique solution stationnaire ( $\dot{b} = 0$ ) de  $b$ , qui se situe proche de  $b_0$ . Cela correspond au point d'intersection de la courbe tracée dans la figure 4.16 avec la droite d'ordonnée 1/2. Cette solution est stable car une légère augmentation de  $b$  crée une vitesse  $\dot{b}$  négative, qui a tendance à ramener  $b$  à sa valeur initiale. Lorsque  $a/b_0$  augmente cette solution stationnaire diminue, mais elle est toujours stable. Pour  $a/b_0$  supérieur à 0.19, il existe deux autres solutions stationnaires, l'une stable



et l'autre instable, pour des valeurs de  $b$  plus faibles. Lorsque  $a/b_0$  atteint la valeur critique de 0.1995, la solution stationnaire initiale disparaît et la distance de séparation décroît brutalement suivant un temps convectif pour se stabiliser autour de la solution stable qui se trouve à  $b/b_0 = 0.48$ . On voit donc apparaître ici l'explication de la déstabilisation du système de deux tourbillons lorsque la taille des cœurs dépasse une fraction critique de la distance de séparation. La valeur critique  $a/b_0 = 0.1995$  obtenue au moyen de cette théorie est proche de la valeur expérimentale. Cependant, elle est largement dépendante des hypothèses utilisées dans le modèle et nous ne pensons malheureusement pas pouvoir trouver un critère exact. Ce modèle est donc une bonne explication du phénomène de la fusion, mais il ne permet pas de déterminer un critère précis.

Ce modèle prédit que la distance de séparation  $b$  doit se stabiliser après avoir diminué de moitié. Il est probable que pour de telles valeurs de  $b$  le modèle ne soit plus valide, car les lignes de courant et les distributions de vorticité sont très différentes. Ce modèle ne décrit pas les instants finaux de la fusion, mais explique simplement comment la fusion débute.

En conclusion, nous avons donné une explication physique de la fusion, basée sur la conservation du moment angulaire et la création de filaments de vorticité. Nous avons ensuite construit un modèle simple à partir de ce mécanisme physique, qui explique pourquoi le système de deux tourbillons se déstabilise lorsque la taille des cœurs devient suffisamment grande devant la distance de séparation.

## 4.4 Caractérisation du vortex final

Nous avons vu dans la figure 4.7 que le carré de la taille des cœurs semble augmenter d'un facteur 2 lors de la fusion convective. Cela veut dire que la fusion est un mécanisme qui fait passer deux vortex de taille initiale  $a_i$     un unique vortex de taille finale  $a_f$ , telle que  $a_f^2 = 2a_i^2$ . Nous allons discuter ce résultat et le comparer à différentes prédictions théoriques.

### 4.4.1 Conservation du moment angulaire

Théoriquement, la circulation totale doit être conservée au cours de la fusion. Nous avons montré dans le chapitre 2 que cela est bien vérifié expérimentalement. D'autre part, le moment angulaire croît de manière continue sous l'effet de la dissipation visqueuse selon la loi (4.18). Pour des nombres de Reynolds élevés, l'étape convective de la fusion est très rapide par rapport au temps visqueux, et le moment angulaire est donc conservé au cours de cette étape. Le moment angulaire avant la fusion a été calculé dans le paragraphe 4.3, pour deux tourbillons axisymétriques Gaussiens, de circulation  $\Gamma$  et de taille de cœur  $a_i$ , séparés par une distance  $b$  :

$$J_i = \Gamma \frac{b^2}{2} + 2\Gamma a_i^2 \quad (4.37)$$

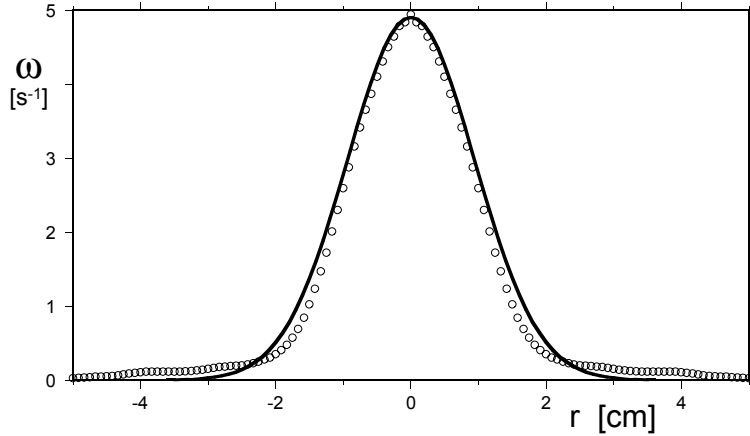


FIG. 4.18 – Profil de vorticité axiale après fusion pour  $t^* = 1.5$ . La vorticité est moyennée sur des cercles centrés sur le maximum de vorticité, afin de lisser les spirales de vorticité. Le trait discontinu correspond à un profil Gaussien de vorticité pour la même circulation ( $\Gamma = 27.3 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) et une taille de cœur  $a = 1.33 \text{ cm}$ . Le nombre de Reynolds vaut 1506.

D'autre part, le moment angulaire final peut être calculé en supposant que le vortex après fusion est aussi Gaussien et possède une circulation  $2\Gamma$  :

$$J_f = 2\Gamma a_f^2 \quad (4.38)$$

En égalant les deux équations (4.37) et (4.38), on trouve un rapport entre la taille du cœur finale et la taille du cœur initiale :

$$\left(\frac{a_f}{a_i}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4(a_i/b)^2} \quad (4.39)$$

En supposant que la fusion débute pour un rapport critique  $a_c/b$  proche de 0.25, on trouve que le carré de la taille du cœur finale est 5 fois plus grand que le carré de la taille du cœur initiale. Ce rapport est supérieur à celui trouvé dans l'expérience, où il était égal à 2. Nous allons expliquer cette différence dans le paragraphe suivant.

#### 4.4.2 Profil du vortex final

Le modèle précédent suppose que le vortex final est Gaussien juste après la fusion. Ceci n'est pas vérifié expérimentalement : la figure 4.18 montre que le profil de vorticité ne peut pas être approximé par une Gaussienne. En effet, les filaments de vorticité qui ont été éjectés lors de la fusion créent un fond de vorticité loin du cœur du vortex final. Cela induit des ailes de vorticité dans le profil de la figure 4.18 qui décroissent moins vite que les ailes d'une Gaussienne. Cette différence est encore plus visible dans la figure 4.20 qui représente la circulation  $\Gamma(r) = 2\pi r v_\varphi$  en fonction du rayon. Ces résultats montrent que la circulation loin du vortex est plus importante que celle obtenue pour un tourbillon Gaussien. Ils semblent indiquer que le vortex

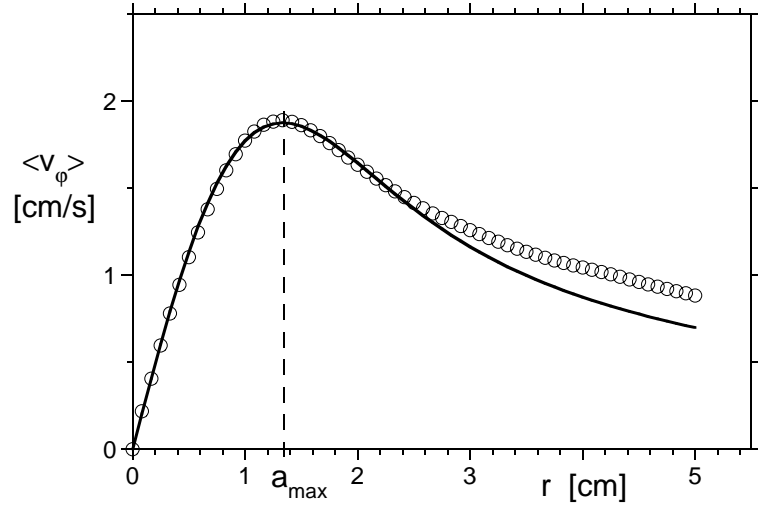


FIG. 4.19 – Profil de vitesse azimutale après fusion pour  $t^* = 1.5$ . La vitesse est moyennée sur des cercles centrés sur le maximum de vortacité. Le trait discontinu correspond à un tourbillon Gaussien de même circulation ( $\Gamma = 27.3 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) et de taille de cœur identique  $a = 1.33 \text{ cm}$ . Le nombre de Reynolds vaut 1506.

pourrait être décomposé en trois zones, comme dans le cas des tourbillons créés par les ailes d'avion trouvés dans le modèle de Jacquin *et al.* (2001).

La vortacité de ces ailes n'influe pas sur la taille du cœur qui est calculée en utilisant le maximum de la vitesse azimutale, car elle ne modifie pas la circulation (et donc la vitesse azimutale) sur les cercles de petits rayons. Cependant, cette vortacité influe beaucoup sur le moment angulaire total, car elle est située loin du centre du système. C'est pourquoi la taille du cœur mesurée expérimentalement est plus faible que la prédiction théorique donnée dans le modèle précédent. Il est donc probable (et cela a été vérifié sur les simulations numériques effectuées par Le Dizès) que si la taille finale du cœur était définie au moyen du moment angulaire final ( $a_J = \sqrt{J/2\Gamma}$ ), le rapport  $a_f^2/a_i^2$  serait effectivement égal à 5. Malheureusement, il n'est pas possible de calculer le moment angulaire à partir des données expérimentales, car les bruits de mesure sur la vortacité font diverger l'intégrale qui définit le moment angulaire.

Après la fusion, le vortex final est soumis aux phénomènes diffusifs, et il doit converger vers un tourbillon Gaussien selon une échelle de temps visqueuse. Il est vraisemblable que sur des temps longs la taille du cœur augmente de façon à satisfaire le rapport 5 précédent. Or sur ces échelles de temps, la taille du cœur augmente aussi à cause de la diffusion visqueuse. On s'attend donc à ce que  $a^2$  augmente plus vite que  $4\nu t$  après la fusion, pour converger vers une droite qui satisfait au moment de la fusion le rapport  $a_f^2/a_i^2 = 5$ . Cette évolution est indiquée dans la figure 4.21, mais n'a pas pu être observée expérimentalement car le temps d'observation n'est pas suffisamment long.

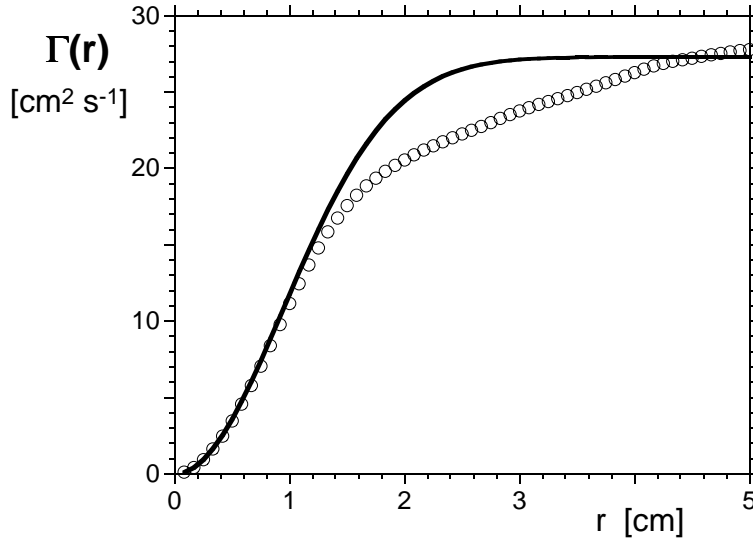


FIG. 4.20 – Profil de circulation en fonction du rayon, obtenu expérimentalement ( $\circ$ ) après fusion pour  $t^* = 1.5$ . Le nombre de Reynolds vaut 1506. Les lignes correspondent à un profil Gaussien de vorticité pour la même circulation ( $\Gamma = 27.3 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) et une taille de cœur  $a = 1.33 \text{ cm}$  (trait continu).

#### 4.4.3 Conservation de l'énergie

Pour la turbulence bidimensionnelle, Carnevale *et al.* (1991b) ont proposé un modèle dans lequel le rapport  $a_f^2/a_i^2$  est différent. Ils ont supposé que l'énergie totale du système était conservée, car les phénomènes dissipatifs deviennent négligeables lorsque le nombre de Reynolds est important. Ils ont aussi supposé que le niveau de vorticité maximal est conservé, ce qui paraît valable à viscosité nulle. L'énergie du vortex final est proportionnelle à  $\omega_f^2 a_f^4$  et l'énergie de la paire de tourbillons initiaux est proportionnelle à  $2\omega_i^2 a_i^4$ . Si les profils des vortex initiaux et finaux sont identiques, les constantes de proportionnalité sont identiques et on obtient l'égalité suivante :

$$a_f^2 = \sqrt{2} a_i^2 \quad (4.40)$$

car le niveau de vorticité est conservé. Le problème de ce modèle est qu'il ne conserve pas la circulation : la circulation finale est 30% plus faible que la circulation initiale. Cela peut s'expliquer en supposant que les filaments, qui contiennent de la circulation ne s'enroulent plus autour du vortex final, mais sont écartés du vortex final par l'effet d'un champ extérieur, car ils sont suffisamment éloignés du vortex final. Cette explication est correcte dans le cas de la turbulence bidimensionnelle, mais elle n'a pas lieu d'être dans le cas de deux tourbillons corotatifs simples. C'est pour cette raison que nous obtenons expérimentalement un rapport supérieur à cette prédiction.

En conclusion, le rapport  $a_f^2/a_i^2$  trouvé expérimentalement est compris entre les valeurs données par les deux modèles décrits précédemment car leurs hypothèses ne sont jamais entièrement vérifiées.

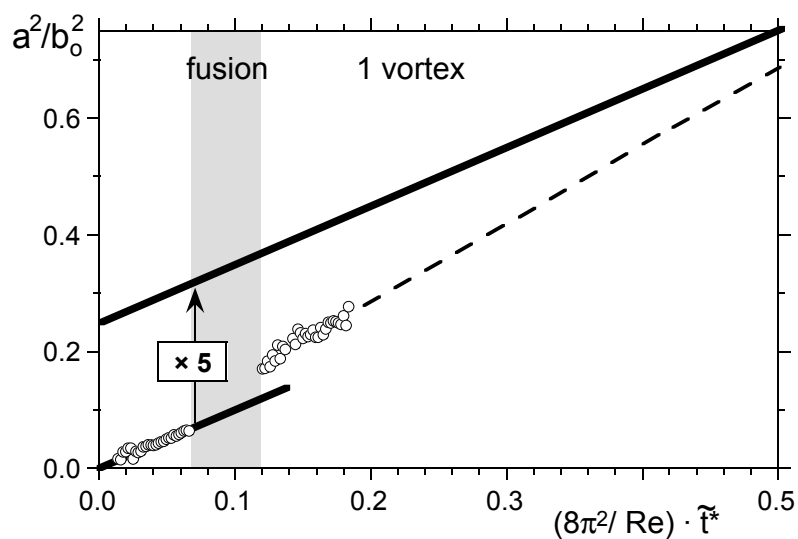


FIG. 4.21 – Modèle de l'évolution temporelle de la taille des cœurs des vortex en fonction du temps visqueux. La croissance visqueuse des tourbillons Gaussiens, dictée par la formule (4.2), se traduit par des droites de pente 1 tracées par des lignes continues. La ligne pointillée correspond à une supposition de la variation de la taille du cœur.



## 5. INSTABILITÉ TRIDIMENSIONNELLE

Au chapitre précédent, nous avons analysé la dynamique bidimensionnelle de l'écoulement à bas nombre de Reynolds. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux éventuelles instabilités tridimensionnelles, pouvant apparaître à haut nombre de Reynolds. Ces travaux ont donné lieu à une publication en préparation pour la revue *Journal of Fluid Mechanics* sous le titre “Elliptic instability of a co-rotating vortex pair”, qui est insérée dans la suite du texte.

### Abstract

In this paper, we report experimental results concerning a three-dimensional short-wave instability observed in a pair of equal co-rotating vortices. The pair is generated in water by impulsively started plates, and is analysed through dye visualizations and detailed quantitative measurements using particle image velocimetry. The instability mode, which is found to be stationary in the rotating frame of reference of the two-vortex system, consists of internal deformations of the vortex cores, which are characteristic of the elliptic instability occurring in strained vortical flows. Measurements of the spatial structure, wavelengths and growth rates are presented, as function of Reynolds number and non-dimensional core size. The presence of the rotation of the pair, which is not a background rotation of the entire flow, is found to lead to a shift of the unstable wavelength band to higher values, as well as to higher growth rates. In addition, a dramatic increase in the width of the unstable bands for large values of the rescaled core radius is found. Comparisons with recent theoretical results by Le Dizès & Laporte (2001) concerning elliptic instability show very good agreement.

At late stages of the flow, when the perturbation amplitude gets sufficiently large, the two vortices merge into a single structure. This happens for smaller cores sizes than in the case of two-dimensional merging. The three-dimensional merging leads to a final vortex characterised by turbulent small-scale motion, whose size appears to be larger than it would have been without instability.

### 5.1 Introduction

The flow consisting of two parallel vortices having the same sense of rotation is one of the simplest configurations for the study of basic vortex interactions. In addition to its intrinsic interest on a fundamental level, it has relevance to a number of different flows and applications.

Co-rotating vortices are found in mixing layers, as a result of the Kelvin-Helmholtz instability. The merging of the vortices dictates the growth of the layer thickness, and the onset of three-dimensionality in the mixing layers could be linked to the appearance of an elliptic instability of these vortices. Vortex merging is also a major ingredient in the dynamics of two-dimensional turbulent flows, which motivated numerous studies on co-rotating vortices. In three-dimensional turbulence, many types of vortex interactions occur between the coherent structures discovered in these flows (Cadot *et al.* 1995, Vincent & Meneguzzi 1991, Kida & Ohkitani 1992), including the ones between (almost) parallel co-rotating vortices. Precise knowledge about their behaviour may lead to a deeper understanding of the complex global dynamics and scalings. Finally, on a more practical side, strong co-rotating vortices are found in the wake of many types of aircraft wings in landing configuration, i.e., with lowered flaps. They eventually merge into a single vortex behind each wing (Chen *et al.* 1999, Devenport *et al.* ), which, due to its strength and longevity represents a danger for following aircraft, in particular in the vicinity of airports. Since this hazard, and the associated rules for separation distances, are the main factor limiting airport capacities today, a detailed analysis of the initial co-rotating vortex flow is thus of great interest in this context.

The two-dimensional evolution of two co-rotating vortices has been extensively studied numerically (see, e.g., Roberts & Christiansen 1972, Overman & Zabusky 1982). It appears that when the core size of the vortices is small compared to their separation distance, they rotate around each other almost like two point vortices. When the cores size, which grows by viscous diffusion, reaches a critical fraction of the separation distance, two filaments of vorticity are ejected and the vortices approach each other to preserve the total angular momentum. As shown numerically (Overman & Zabusky 1972) and experimentally (Griffiths & Hopfinger 1987), they finally merge into a single vortex, which becomes axisymmetric by rolling up the filaments of vorticity into tight spirals (Melander & McWilliams 1987). Several numerical (Saffman & Szeto 1980, Dritschel 1985, Dritschel 1986) and theoretical (Melander *et al.* 1988) studies calculated the critical ratio of core size and separation distance, at which merging initiates, for patches of uniform vorticity. This criterion was recently generalised by Meunier *et al.* (2001b), to the case of non-uniform distributions of vorticity, by defining the core size, not through the vortex area, but using the angular momentum and the circulation. In all these analyses, the possibility of a three-dimensional instability, which could possibly modify this picture considerably, has not been considered.

Several three-dimensional instabilities occurring in systems of parallel vortices are known, in particular for the case of a counter-rotating pair. The first stability analysis of such a pair was performed by Crow (1970) on a counter-rotating vortex pair, to explain the observation of periodic symmetric perturbations of aircraft wakes. The growth of these perturbations is caused by the interaction of three effects: the strain field induced by each vortex at the location of the other one, the self-induced rotation of each perturbed vortex, and the flow field induced by the perturbations of the other



vortex. Crow's analysis, in which the vortices were treated as lines, showed that all effects induce a rotation of a given wavy perturbation, and that they can cancel each other under certain conditions, producing a stationary wave which is pulled apart exponentially by the strain. This happens typically for wavelengths between 5 and 10 times the vortex separation distance. Using the same procedure, Jimenez (1975) proved that, for the case of co-rotating vortices, the different rotation rates could never add up to zero, which means that such flows are stable with respect to this instability mechanism. In the present study, we did indeed not observe any long-wavelength instability, which is consistent with this result.

In the previous analyses, the hypothesis of vortex filaments restricted the validity of the results to wavelengths much larger than core size of the vortices. In order to extend the stability theory to smaller wavelengths, Moore & Saffman (1975) and Tsai & Widnall (1976) studied the stability of a finite-core vortex in a uniform, stationary straining field, which leads to locally elliptic streamlines. Their *global* analysis showed that neutral modes of the unstrained vortex (Kelvin modes) could be resonantly amplified by the strain, leading to short-wave instability.

The elliptic instability was rediscovered from a *local* viewpoint, *i.e.* assuming the wavelength is small compared to the size of the region with elliptic flow (core size). Pierrehumbert (1986) and Bayly (1986) studied the three-dimensional stability of an inviscid elliptic flow of infinite extent, showing that inertial waves, found in rotating flows (Greenspan 1968), could be amplified parametrically by the strain, leading to instability. Landman & Saffman (1987), following the analysis of Craik & Criminale (1986), extended this result to include viscous effects. This work has been generalised by Lifschitz & Hameiri (1991) to the case where inertial waves cannot be calculated analytically, by using the methods of "geometric optics". The case of a rotating elliptic flow was studied by Craik (1989), Leblanc & Cambon (1997; 1998), and Le Dizès (2000b). Waleffe (1990) showed that combinations of unstable inertial waves can lead to localized disturbances, which can satisfy certain boundary conditions, *e.g.*, for flow in cylindrical containers. Moreover, the structure of this disturbance is comparable to the inner profile of the Kelvin waves of the global analysis cited above, proving that the two approaches describe the same phenomenon.

A comprehensive review of the elliptic instability was recently given by Kerswell (2002).

Experimental results on three-dimensional instabilities of a vortex pair are very rare, and treat mostly the counter-rotating case. Short-wave instabilities were initially observed on vortex rings by Kruttsch (1939), Maxworthy (1972), and Widnall & Sullivan (1973). Thomas & Auerbach (1994) found such an instability on a counter-rotating vortex pair, which showed a certain resemblance with the theory of Tsai & Widnall (1976). A more detailed study of the counter-rotating vortex pair was done by Leweke & Williamson (1998), showing that the instability has the same structure as the perturbation found by Waleffe (1990), and that wavelengths and growth rates are in agreement with the two preceding theories. On the other hand, there have been a few experiments on flows inside an elliptical container (Vladimirov

*et al.* 1987, Malkus 1989, Eloy *et al.* 2000), showing good agreement with the theory of Waleffe (1990).

In all these studies, the strain felt by a given vortex was stationary. So far no experimental result is available on the effect of a time-dependent, and in particular a rotating strain. In the present study, we investigate experimentally the short-wavelength instability of a symmetric laminar co-rotating vortex pair, which is the simplest configuration in which a vortex experiences a rotating strain. Some preliminary results of this work concerning the existence of the elliptic instability in this flow were reported earlier (Meunier & Leweke 2001a). In this paper, we give a detailed quantitative and qualitative description of the phenomenon. There has been also a comparison between numerical simulations and experimental results by Leweke *et al.* (2001), which again agrees with theoretical predictions of Le Dizès & Laporte (2001).

After a description of the experimental apparatus and the two-dimensional base flow in section 5.2.1, we show in section 5.3 the overall structure and symmetry of the instability in our flow. In section 5.4, we present measurements of wavelengths and growth rates as function of the parameters of the flow, and make comparisons with theoretical results on elliptic instability, in particular with those from a recent study by Le Dizès & Laporte (2001), which directly treats the flow considered here. Section 5.5 shows how the instability modifies the merging process of the two vortices, which occurs at late stages, with respect to the purely two-dimensional case. Conclusion follow in section 5.6.

## 5.2 Experimental details and base flow

### 5.2.1 Set-up and methods

The flow was studied in a rectangular water container with Plexiglass walls, having a square base of  $50 \times 50 \text{ cm}^2$  and a height of 130 cm. Two vertical vortices are created using two flat plates, impulsively rotated from rest around their vertical edges, as shown schematically in figure 5.1(a). The two resulting starting vortices rotate around each other by mutual induction. An example of a cross-cut visualisation of the initial pair is shown in figure 5.2. The plates are anodized for protection against oxidation, and painted in black for a good contrast in the flow visualization. They have dimensions  $10 \times 0.5 \times 135 \text{ cm}^3$  and their free edges are sharpened to an angle of  $30^\circ$ . The high aspect ratio of the plates creates long and thin vortices, which is needed to keep the effects of axial velocity, induced by the end conditions at the bottom of the tank, away from the observation area, consisting of the upper 40 cm below the free surface. The plates are driven by computer-controlled step-motors. A high reduction in the gears leads to a displacement  $\Delta\Theta = 0.0225^\circ/\text{step}$  of the plates, giving them a smooth movement. The separation between the two tips of the plates is 3.2 cm when the plates are aligned, *i.e.* for an angle  $\Theta = 0$  (see figure 5.1a). The plates start from a negative angle  $\Theta = -10^\circ$ , so that the vortices are fully created before they begin to interact.

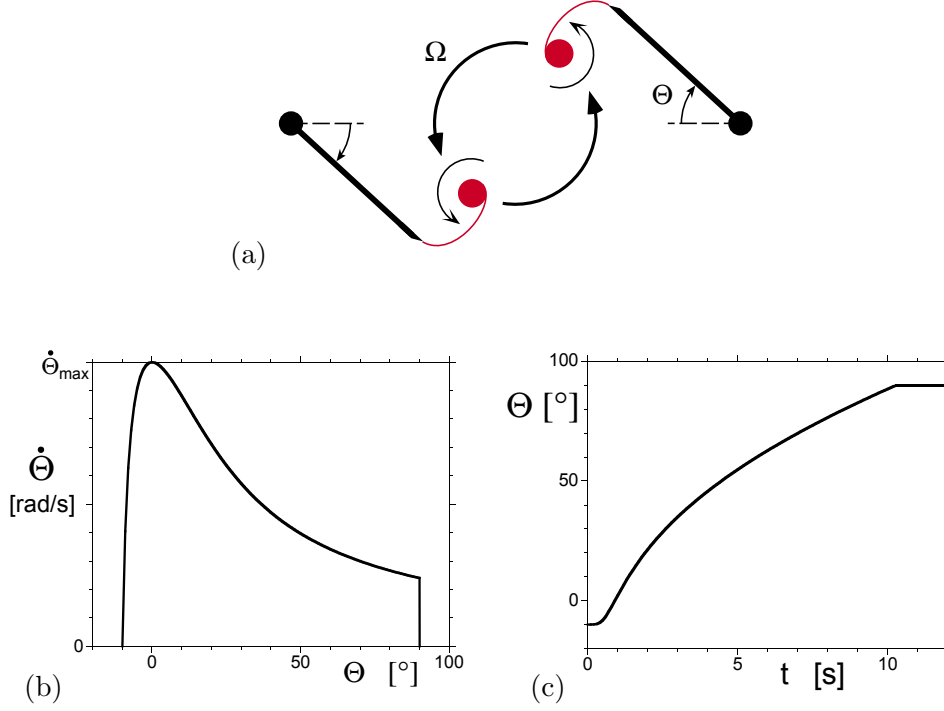


FIG. 5.1 – *Generation of the vortices. (a) Principle of the experimental set-up. (b) Variation of the angular velocity  $\dot{\Theta}$  of the generating plates as function of their angle  $\Theta$ , for a movement defined by Eq. (5.1). (c) Time evolution of the angle  $\Theta$  of the plates, for a maximal angular velocity  $\dot{\Theta}_{\max} = 0.4 \text{ rad s}^{-1}$ .*

The motion history of the plates has been chosen carefully, through slow empirical improvements, to avoid instabilities during the roll-up process, and create concentrated vortices which follow an approximately circular path, despite the presence of the plates. The motion profile (angular velocity as function of angle) that was finally adopted is the following:

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_{\max} \frac{23^\circ}{\Theta + 11^\circ} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{\Theta + 10^\circ}{15^\circ}\right)^{5/4}} \right\}. \quad (5.1)$$

It is plotted in figure 5.1(b), and consists of a strong but smooth acceleration, followed by a gradual slow-down. They stop when they reach  $\Theta = 90^\circ$ , as shown in figure 5.1(c). The maximum angular velocity  $\dot{\Theta}_{\max}$  is varied between  $0.1$  and  $0.4 \text{ rad s}^{-1}$  to adjust the circulation of the vortices, which defines the Reynolds number (see below). A possible difference in the circulations of the vortices, coming from residual convection motion in the tank, is corrected for each experiment by adjusting  $\dot{\Theta}_{\max}$  for each vortex individually.

In order to visualise the flow, two fluorescent dyes (Fluoresceine and Rhodamine B) are painted along the edges of the plates. For this purpose, the plates, whose supports are mounted on a carriage on vertical rails, can be lifted out of the water before the experiment. When the dyes are dry, the plates are then lowered slowly into the water without disturbing the fluid

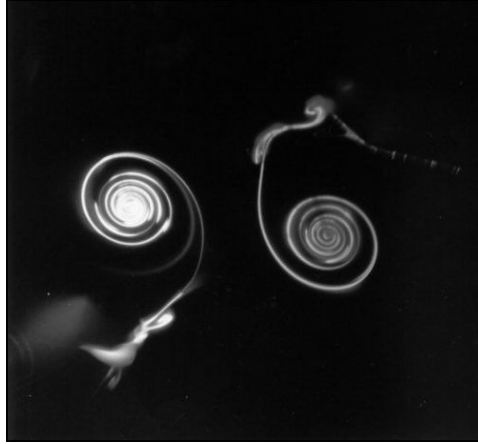


FIG. 5.2 – *Dye visualisation of the co-rotating vortex pair in a plane perpendicular to their axes. The right generating plate is faintly visible; it ends at the beginning of the right dye filament.*

significantly. During the rotating motion of the plates, the dye washes off the plates and very effectively marks the vortex centers, as seen in figure 5.2. The flow is illuminated with light from a 5 W Argon laser, either in volume or in a horizontal plane perpendicular to the vortex axes. Images are recorded either on video tape, a computer using a digital high-resolution camera, or on a standard 35 mm photographic film.

Quantitative measurements of velocity fields are obtained by digital particle image velocimetry (DPIV). For this method, the flow is seeded with small reflecting particles of mean diameter  $50\text{ }\mu\text{m}$  and density  $1.00 \pm 0.02\text{ g cm}^{-3}$ , illuminated by a sheet of laser light of 3–5 mm thickness. These particles can be expected to correctly follow the laminar motion of the fluid, since the characteristic length scales are of the order of the vortex core size, *i.e.* more than two order of magnitude larger than the particle diameter. Image pairs are recorded by a high-resolution digital camera of  $1008 \times 1018\text{ pixel}^2$ , with a time delay of 33ms when using a continuous Argon laser, and 15 ms when using two pulsed Nd-YAG lasers for higher Reynolds numbers. The images are treated by a cross-correlation algorithm developed for velocity fields containing high velocity gradients. The interrogation windows, of dimensions  $32 \times 32\text{ pixels}^2$  (corresponding to about  $3 \times 3\text{ mm}^2$ ), are translated and deformed according to the velocity gradients, to keep the correlation peaks as high as possible in the case of intense velocity gradients (Meunier & Leweke 2001c). One obtains a velocity field of  $60 \times 60$  vectors, to which a median filter is applied, which corrects the spurious vectors (2% on average). A typical initial velocity field is shown in figure 5.3(a), where no smoothing was applied. From these velocity fields, the axial vorticity can be calculated using finite-difference or contour methods (figure 5.3b).

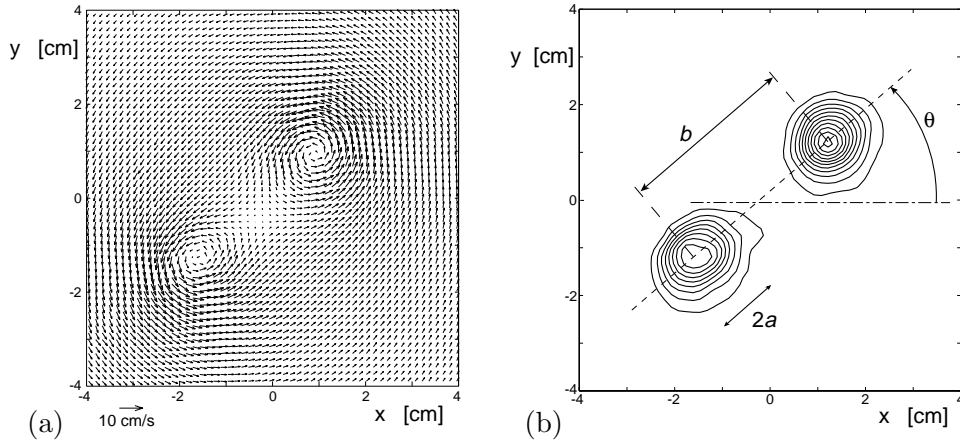


FIG. 5.3 – Typical velocity field (a) and vorticity contours (b) obtained by PIV measurements for a core size-to-separation distance ratio  $a/b = 0.17$  and a  $Re = 3600$ . The difference between two vorticity contours is  $2 \text{ s}^{-1}$ .

### 5.2.2 Characteristics of the two-dimensional base flow and their determination

DPIV measurements are necessary to determine accurately the initial conditions of the flow, which for the present problem means the two-dimensional velocity field before the appearance of the three-dimensional instability. Precise knowledge of these conditions is essential for a meaningful comparison with theoretical results, since theoretical predictions are very dependent on the two-dimensional distribution of vorticity. A detailed study of the two-dimensional flow was presented in Meunier *et al.* (2001b); here, we only recall the basic results, necessary for the present purpose.

A pair of equal co-rotating vortices is characterised by the circulation  $\Gamma$  of each vortex, the separation distance  $b$  between the two vortex centres, and their characteristic core radius  $a$ . These quantities were determined in the following way:

The circulation  $\Gamma$  is calculated by integrating the velocity on a streamline around each vortex. Its determination is very precise since the velocity field is very accurate outside the vortex cores. The uncertainty in the circulation is found to be small:  $\Delta\Gamma/\Gamma \approx 1\%$ . The circulation of one vortex is used to define the Reynolds number of the flow:  $Re = \Gamma/\nu$ . It was varied between 1000 and 5000 for this study.

To properly define the core size of the vortices, we need to examine their individual velocity distributions. From measurements as in figure 5.3, we determine the azimuthal velocity  $v_\varphi$ , as function of the radial distance  $r$  from the centre of a given vortex, i.e., the local maximum of vorticity. An example of the azimuthally averaged profile  $v_\varphi(r)$  is shown in figure 5.4(a). The radius  $a_{\max}$  at which the mean azimuthal velocity is maximum is very well defined; it will be used for the definition of the core size  $a$ . The comparison in figure 5.4(a) with the profile of a Gaussian vortex, given by

$$v_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-r^2/a^2} \right), \quad (5.2)$$

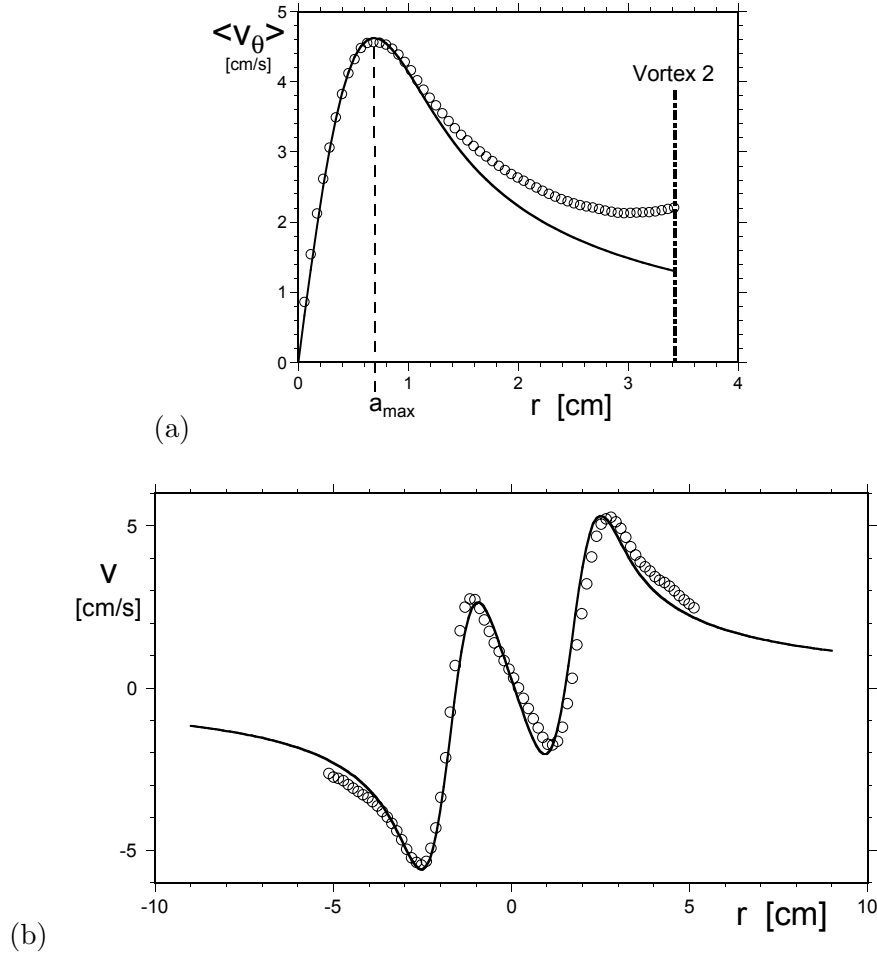


FIG. 5.4 – (a) Typical profile of the mean azimuthal velocity of one vortex. (b) Transverse velocity profile on a line joining the two vortex centres. The solid lines correspond to theoretical predictions obtained for Gaussian vortices defined by Eq. (5.2) with the same circulations ( $\Gamma_1 = 33 \text{ cm}^2/\text{s}$  and  $\Gamma_2 = 30 \text{ cm}^2/\text{s}$ ), core sizes ( $a = a_{\max}/1.12 = 0.62 \text{ cm}$ ), and separation distance ( $b = 3.6 \text{ cm}$ ) as measured.

shows that the experimental vortex is very well represented by such a profile over large parts of the core. For a Gaussian vortex, the radius of maximum circumferential velocity is related to the core parameter  $a$  by:  $a \approx a_{\max}/1.12$ . In the following, we will use the same relation to calculate the core radius of the experimental vortices. We adopt this method, rather than a least-squares fit of the velocity field to the superposition of two Gaussian vortices, since it remains applicable for general vorticity profiles, in particular those found after the merging process, which are clearly not Gaussian any more. In figure 5.4(a), when the radius gets of the order of the separation distance between vortices, the experimental values are higher than those for a Gaussian vortex. This is probably caused by the presence of the second vortex, whose velocity field contributes to the measurements around the first. In figure 5.4(b), the second vortex was included in the comparison, which shows the velocity component perpendicular to the line joining the two vortices, as

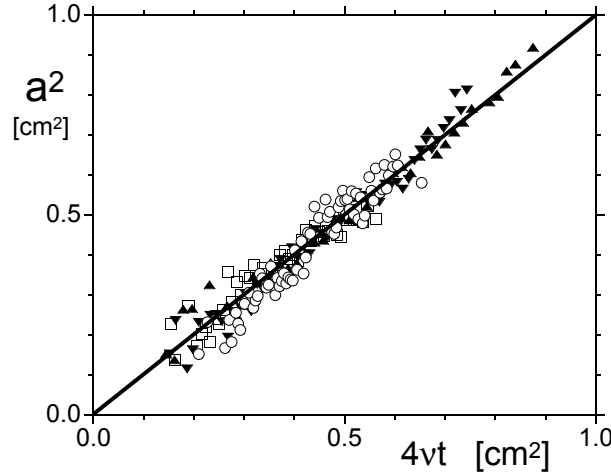


FIG. 5.5 – Time evolution of the square of the core size  $a$ . The solid line corresponds to the theoretical prediction (5.3), obtained for a Gaussian vortex defined by Eq. (5.2).  $\blacktriangle$ :  $Re = 742$ ,  $\blacktriangledown$ :  $Re = 1506$ ,  $\square$ :  $Re = 2258$ ,  $\circ$ :  $Re = 3600$ .

function of the position along this line. The agreement between measurement and the prediction using Gaussian vortices is very good.

The core size increases in time due to viscous diffusion of vorticity. Measurements of this growth are shown in figure 5.5 for different experiments. They follow quite nicely the theoretical evolution for a Gaussian vortex, given by

$$a^2 = 4\nu(t - t_o). \quad (5.3)$$

Use of such a linear fit to a given set of data, allows the determination of  $a$  at a given time in the experiment with an uncertainty of  $\Delta a/a \approx 4\%$ , despite the scatter observed in figure 5.5.

The separation distance  $b$  between the two vortex centres is found from the location of the two local vorticity maxima, measured on smoothed vorticity fields. The effect of one vortex on the location of the other maximum is negligible, even when the vortices are very close. Considering again nearly Gaussian vortices, and the worst case of  $a/b \approx 0.25$  (for higher values the vortices merge), the vorticity of the first vortex is  $10^{-7}$  times the vorticity of the second vortex at the centre of the latter. The error in the measurement of the separation distance is therefore relatively small  $\Delta b/b \approx 2\%$ . Figure 5.6 shows the evolution of the separation distance  $b$  as function of the non-dimensional time  $t^*$  (see equation (5.5) below). The origin of time is taken at the beginning of the plate motion. After an initial phase of vortex formation ( $t^* < 0.2$ ), the separation distance remains fairly constant, although slight oscillations are visible, due to the presence of the vortex-generating plates in our set-up. The average value during this second phase defines the ‘initial’ separation distance  $b_o$ , which is used to non-dimensionalise the lengths of the experiment, and in particular the core size  $a$ .

In this stage, the vortices rotate around each other. The orientation  $\theta$  of the pair (see figure 5.3), which is also obtained from the locations of

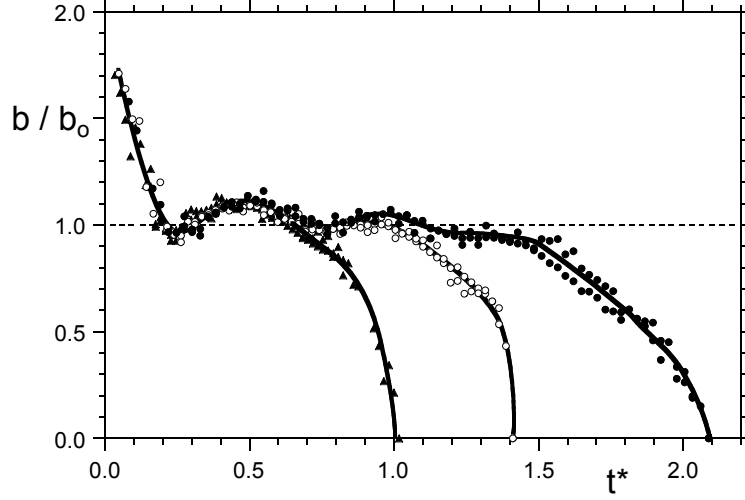


FIG. 5.6 – Evolution of the separation distance  $b$  between the two vortex centres with the non-dimensionalised time  $t^* = t/t_c$  for three different Reynolds numbers.  $\blacktriangle$  :  $Re = 742$ ,  $\circ$  :  $Re = 1506$ ,  $\bullet$  :  $Re = 2258$ .

vorticity maxima, is plotted in figure 5.7 as function of time. It increases almost linearly with a mean angular velocity close to the angular velocity  $\Omega$  of a system of two point vortices with the same circulation and separation distance:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\pi b_0^2}. \quad (5.4)$$

Some slight variations of the angular velocity can be observed in the measurements, which are due to the variations of the separation distance, as seen above. Indeed, when taking into account the instantaneous separation distance measure in the same experiment, the agreement between measurement and point-vortex prediction is much better (see figure 5.7).

The average period of rotation of the pair

$$t_c = \frac{2\pi^2 b_0^2}{\Gamma} \quad (5.5)$$

is used to non-dimensionalise time  $t$ :  $t^* = t/t_c$ .

As explained by Meunier *et al.* (2001b), when the core size  $a$  reaches approximately 25% of the separation distance  $b$ , a rapid change in the two-dimensional flow occurs. The vortex separation distance starts to decrease quickly (figure 5.6), and the two vortices merge into a single final one in a mainly convective process. For low Reynolds numbers, the flow is found to remain two-dimensional throughout. The instability developing in the initial vortex pair at higher speeds leads to three-dimensional unstable merging, which is treated in section 5.5 below.

### 5.2.3 Measurements of the three-dimensional flow

As shown in the following sections, a three-dimensional instability appears in the co-rotating vortex flow, when the Reynolds number is sufficiently



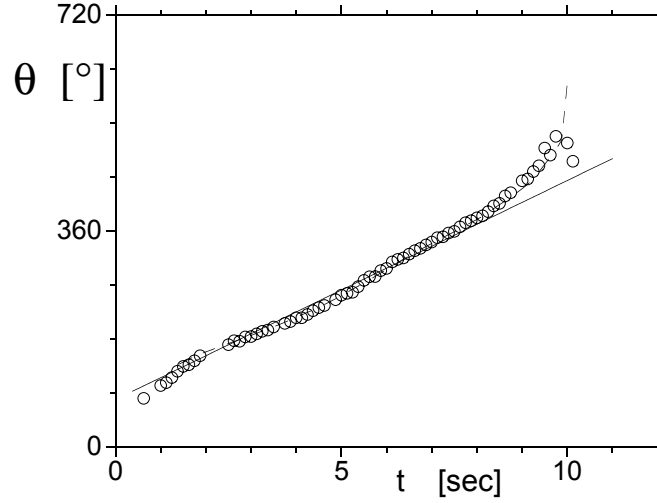


FIG. 5.7 – Time evolution of the angle  $\theta$  of the vortex pair for  $Re = 3600$ . The lines correspond to the orientation of two point vortices, separated by a constant averaged distance  $b = 4\text{ cm}$  (solid line), or by a time-varying distance  $b(t)$  (dashed line) obtained in the same experiment.

high. It is characterised by internal deformations of the vortex cores, which are antisymmetric with respect to the centre of rotation of the pair. In the unforced natural case, the wavelength of the perturbations was somewhat varying along the vortex, and its phase was random for a given run. A special procedure had to be adopted, in order to obtain the quantitative results presented in section 5.4.

For most visualisations and measurements presented in this paper, the flow was excited at a particular wavelength, close to the naturally occurring one. This control was achieved by sticking small pieces of adhesive tape (dimensions  $5 \times 9\text{ mm}$ ) close to (but not exceeding) the edge of the generating plates, separated by the desired wavelength (typically  $3\text{--}4\text{ cm}$ ). This very small perturbation was sufficient, in most cases, to fix the wavelength and phase of the developing instability. In this way, the three-dimensional flow was much more regular, and quantitative measurements became possible. The wavelength and phase were nevertheless measured in each run from side view visualisations.

The fact that the phase of the three-dimensional perturbations was fixed, made possible the measurements of the growth of the vortex centre line waviness, using dye and simultaneous visualisation of two cross-cut planes, as described in section 5.4.4. (DPIV measurements are not precise enough to obtain this quantity with any reasonable degree of precision in this kind of flow). It was verified, using numerical simulations and analytical expressions of the perturbations (equations(5.11)-(5.13) below), that the growth rate obtained in this way is in principle identical to the growth rate of the unstable mode, provided that the amplitude of the dye wave is smaller than the core size  $a$ , for the case of a Gaussian vortex. The values of  $a$  and the vortex separation distance  $b$ , associated with a given measurement of growth rate,

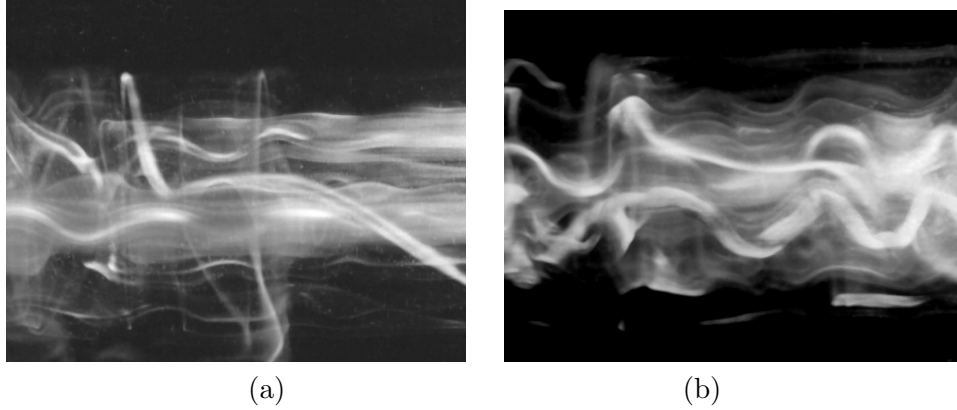


FIG. 5.8 – *Side-view visualisations of the freely developing three-dimensional instability of a co-rotating vortex pair, for a Reynolds number of approximately 3000.*

represent average values during the period in which the growth rate was determined, i.e., in which exponential growth was observed (see figure 5.18). Despite all these precautions, the uncertainty in the (dimensionless) growth rate must be estimated to be about 25%, based on the observed scatter. This may be due to a number of effects, e.g., residual motion in the tank of random perturbations during vortex roll-up generating waves that travel along the vortices and shift the phase of the 3D perturbations, inducing errors in the measurement of the amplitude. This illustrates the high sensitivity of the vortex flow studied here, and the difficulties of obtaining quantitative information.

Other quantities concerning the three-dimensional instability, in particular certain length scales related to the mode structure, were obtained from visualisations or DPIV measurements. The error estimates given below for these quantities reflect the precision with which they could be read off the images, using, where possible, averages over several wavelengths of the instability.

### 5.3 Short-wavelength three-dimensional instability of the vortex pair.

For high Reynolds numbers ( $Re > 2000$ ), we discovered a three-dimensional instability of the vortices, which had never been observed on a co-rotating vortex pair. In this section, we are going to describe the shape of this instability and give some quantitative characteristics of its structure, based on different visualizations.

The instability has first been observed in a natural way, without excitation of a specific perturbation. The vortex pair is initially laminar and two-dimensional. After approximately one rotation period, it becomes unstable, leading to a rapid change in the nature of the flow: the vortex centerlines undulate and the flow becomes highly three-dimensional. Figure 5.8 shows the wavy deformations of the vortices, which appear in about half a rotation period. The wavelength is relatively regular, slightly larger than the vortex

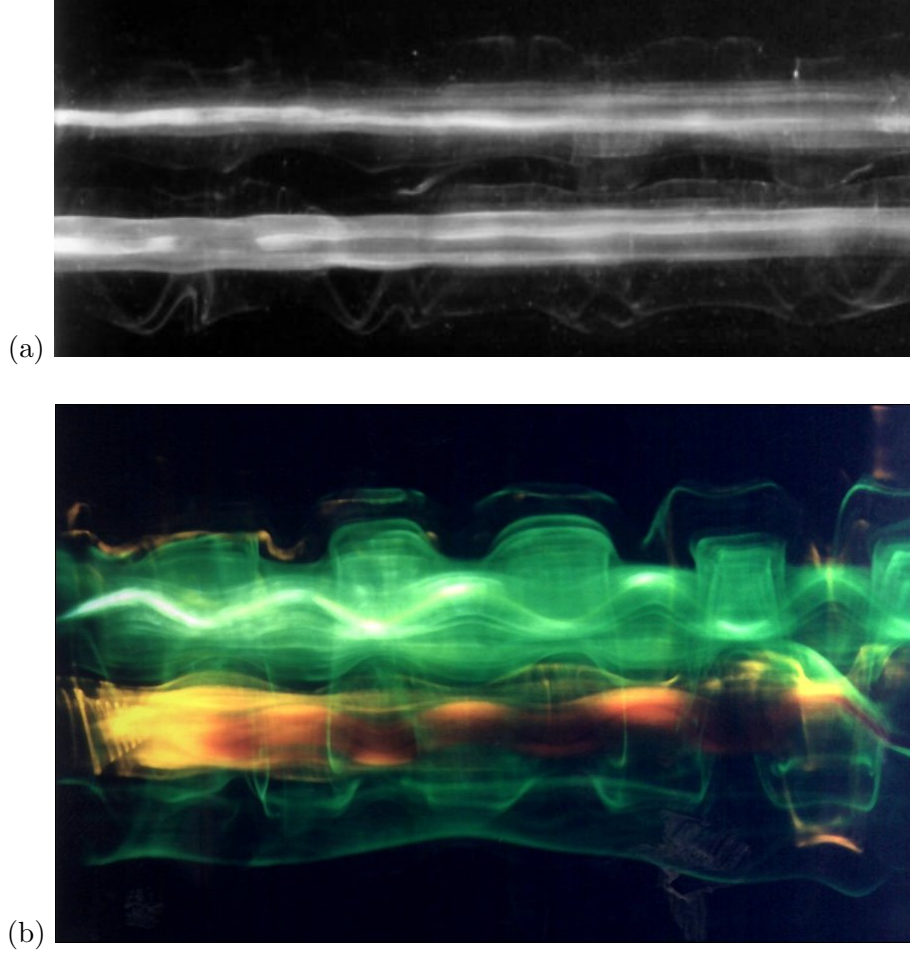


FIG. 5.9 – *Orthogonal side views of the three-dimensional instability in a co-rotating vortex pair, for  $Re \approx 3000$  and a wavelength  $\lambda = 3.5$  cm. The vortices are in a plane oriented at  $-45^\circ$  (a) and  $+45^\circ$  (b) with respect to the paper. The perturbation is orthogonal to the plane of the paper and contained in the plane of the paper, respectively.*

core size, and the perturbations of the two vortices seem to be in phase.

Although the instability has been first observed without excitation, it was more effective to excite a specific wavelength, so as to freeze the phase of the instability and make the flow reproducible. Moreover, the shape of the instability is then more visible since the perturbation is clearer. Figure 5.9(b) shows the shape of the instability at  $t^* \approx 1$ , where the two vortex centerlines are in the plane of the image. It is clearly visible that the two vortex centerlines undulate in phase. The perturbations are thus antisymmetric with respect to the middle between the vortices. This symmetry has been observed in a wide range of the parameters, and is independent of the symmetry of the excitation. Figure 5.9(a) shows the pair earlier (for  $t^* \approx 1.25$ ), when the plane of the perturbation is perpendicular to the image. The waviness exists (as indicated by simultaneous cross-cut visualisations), but it is not visible since it is perpendicular to the image. It proves that the centerlines effectively undulate on a plane and that they are not located on a spiral.

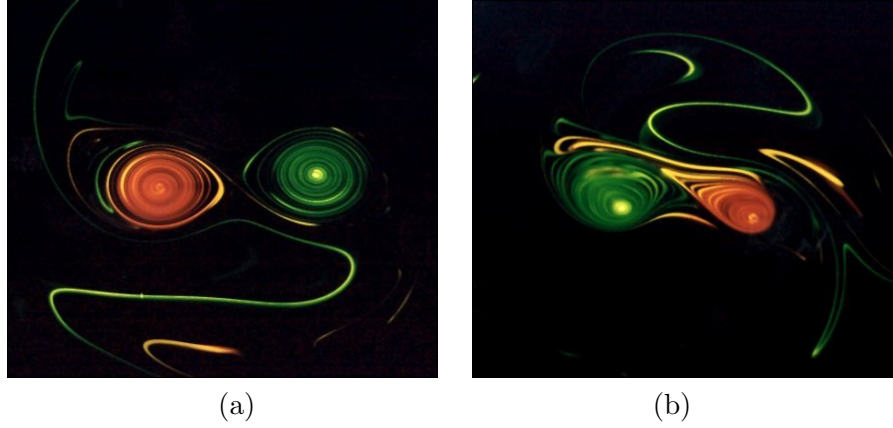


FIG. 5.10 – *Cross-cut visualization of the three-dimensional instability, for a  $Re \approx 3000$  and  $\lambda = 3.5$  cm. (a)  $t^* \approx 1$ ; (b)  $t^* \approx 1.5$ .*

Figure 5.9(b) shows that the instability has a complex radial structure. Around the centerline, there is an invariant stream tube of diameter  $d_{inv}$ , which remains cylindrical. Inside this tube the dribbles of dye are displaced in one direction, whereas they are displaced in the opposite direction outside this tube. Measuring the diameter of this tube gives an average ratio of the diameter  $d_{inv}$  and the wavelength  $\lambda$ :

$$\lambda/d_{inv} = 2.3 \pm 0.2 \quad (5.6)$$

This value of the diameter of the invariant tube is slightly larger than what was found by Leweke & Williamson on a counter-rotating vortex pair ( $\lambda/d_{inv} = 2.0 \pm 0.2$ ).

By taking into account this complex radial structure, the antisymmetry of the perturbation can now be explained by a matching condition between the velocities of the two perturbation at the middle between the vortices, as done by Leweke & Williamson (1998).

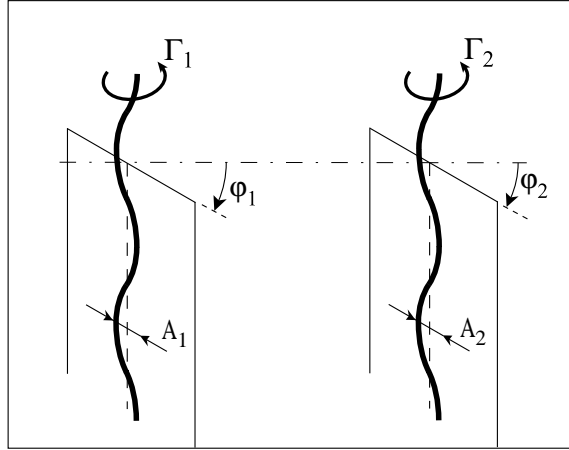
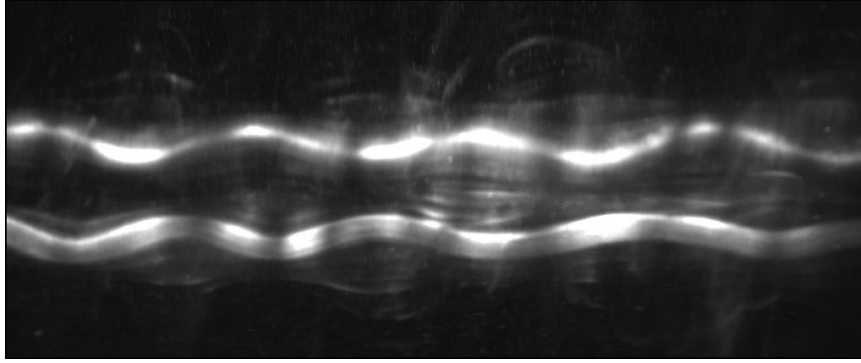
Figure 5.10 shows cross-cut views of the instability at a maximum of the centerlines deformation. The instability breaks the initial symmetry of the pair, visible on figure 5.10a. The two vortex centers are displaced toward the left and the top of the image. This creates a sharp red tip at the inner side of the pair, and a smaller green tip at the outer side of the pair.

As described in section 5.4.4, we were able to measure the angle  $\varphi(t)$  between the plane containing the perturbation and the plane joining the two vortices. It is fairly constant around

$$\varphi = -50^\circ \pm 5^\circ \quad (5.7)$$

showing that the perturbation is stationnery in the rotating frame of reference. It can be noticed that the orientation  $\varphi$  of the plane is negative, if the pair rotates in the counter-clockwise way, *i.e.* when the circulations are taken positive.

To conclude, the structure of this instability is very well described by the schematic of figure 5.11 with angles  $\varphi_1 = \varphi_2 = -50^\circ$ , plus an invariant tube of diameter defined by Eq. (5.6).

FIG. 5.11 – *Schematic of the three-dimensional structure of the instability.*FIG. 5.12 – *Side view visualisation of a symmetric perturbation of the vortices, possibly involving the second mode of the elliptic instability.  $Re = 3600$  ;  $\lambda/a = 3.4$  ;  $a/b = 0.22$ .*

In most cases, the perturbation was antisymmetric. However, for a very narrow band of the parameters, a symmetric perturbation of the vortices was observed (independent of the symmetric or antisymmetric initial excitation). This structure of the elliptic instability is shown on figure 5.12. It appeared for  $a/b = 0.22$  and for a non-dimensionalized wavelength  $\lambda/a$  equal to 3.4, at a Reynolds number of 3600. We will come back on this symmetric perturbation in section 5.4.5, which is not representative of the instability that was usually observed.

## 5.4 Elliptic instability of vortices in a rotating strain

In this section, we demonstrate that the instability observed on the co-rotating vortex pair is a consequence of an elliptic instability of each vortex. We then compare the theoretical predictions of growth rate and wavelength with their experimental measurements.

### 5.4.1 Theoretical background

By considering the velocity gradient of a vortex, one can deduce that the velocity field induced by one vortex on the opposite is a potential stagnation-point flow with a strain equal to:

$$\varepsilon_{\text{ext}} = \Gamma/2\pi b^2 \quad (5.8)$$

The stretching axes of the stagnation-point are oriented in the  $-45^\circ$  direction compared to the line joining the two vortices. We have seen in section 5.2.2 that the vortex pair rotate at the angular velocity  $\Omega$  defined by Eq. (5.4). Each vortex is thus located in a stagnation-point flow  $\varepsilon_{\text{ext}}$ , whose axes rotate at the angular velocity  $\Omega$ . Le Dizès (2000a) showed that a Gaussian vortex in a rotating external stagnation-point flow has a stretching rate  $\varepsilon_{\text{int}}$  at the center of the vortex which depends on the rotation frequency of the external strain. A fit of the ratio of the inner and outer strain is given by Le Dizès & Laporte (2001) and can be simplified in our symmetric case as:

$$\varepsilon_{\text{int}}/\varepsilon_{\text{ext}} = 1.5 + 0.038 \left(0.16 - (a/b)^2\right)^{-9/5} \quad (5.9)$$

The flow at the center of each vortex is thus a superposition of solid-body rotation at angular velocity  $\mu = \Gamma/\pi a^2$  and a strain  $\varepsilon_{\text{int}}$  rotating at angular frequency  $\Omega$ . The analysis will now be done in the frame of reference rotating at  $\Omega$ , *i.e.* with the axes of the external strain. In this rotating frame the two-dimensional flow  $\mathbf{U}$  at the center of each vortex is equal to:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mu} - \varepsilon_{\text{int}} & 0 \\ \tilde{\mu} - \varepsilon_{\text{int}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Here,  $\tilde{\mu} = \mu - \Omega$  is the angular velocity at the center of the vortex in the rotating frame. This flow is an exact solution of the Navier-Stokes equation, and its streamlines are ellipses with aspect ratio  $E = [(\tilde{\mu} + \varepsilon_{\text{int}})(\tilde{\mu} - \varepsilon_{\text{int}})]^{1/2}$ . We thus have to study the instabilities of such a flow in a rotating frame at the angular frequency  $\Omega$ . Waleffe (1990) found time-growing disturbances that are localized near the axis of rotation, by combining several unstable perturbations given by Bailly (1986). For vanishing strain, these solutions take a simple analytical form in the cylindrical components  $(r, \varphi, z)$ :

$$u_r = \frac{C}{2 \tan \xi} e^{\sigma t} [3J_0(k \tan \xi r) + J_2(k \tan \xi r)] \cos(kz) \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \quad (5.11)$$

$$u_\varphi = \frac{C}{2 \tan \xi} e^{\sigma t} [3J_0(k \tan \xi r) - J_2(k \tan \xi r)] \cos(kz) \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \quad (5.12)$$

$$u_z = C e^{\sigma t} J_1(k \tan \xi r) \sin(kz) \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \quad (5.13)$$

These solutions depend on two parameters: the axial wave vector  $k$  and the angle  $\xi$  between the wave vector of the inertial waves used by Bailly (1986) and the axis of rotation.  $J_i$  are Bessel functions of the first kind,  $C$  is a constant and  $\sigma$  is the growth rate of the perturbation. These formulas have

been given by Waleffe (1990) for  $\xi = 60^\circ$ , and have been generalized here for  $\xi \neq 60^\circ$ . The vertical component of the vorticity is given by:

$$\omega = -2Cke^{\sigma t} J_1(k \tan \xi r) \cos(kz) \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \quad (5.14)$$

These solutions are unstable for a particular band of angles  $\xi$ , depending on the inner strain  $\varepsilon_{\text{int}}$  and on the angular velocity  $\Omega$  of the frame. The growth rate has been calculated theoretically by Le Dizès (2000b):

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{3\mu - \Omega}{4\mu}\right)^4 \varepsilon_{\text{int}}^2 - (\mu - \Omega - 2\mu \cos \xi)^2} \quad (5.15)$$

In this equation,  $\mu$  is the angular velocity at the centre of the vortex. The growth rate is maximum for an angle  $\xi$  given in our case by:

$$\cos \xi = \frac{\mu - \Omega}{2\mu} = \frac{1}{2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (5.16)$$

Landman & Saffman (1987) showed that viscous effects could be easily taken into account by adding a viscous term  $-\nu(k/\cos \xi)^2$ . Introducing the values of  $\Omega$  and  $\varepsilon_{\text{int}}$  given in (5.4) and (5.9) leads to a global formula for the growth rate non-dimensionalised by the rotation period  $t_c$ , as function of the angle  $\xi$  and the wavevector  $k$ :

$$\sigma^* = \pi \left\{ \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]^4 \left[ 1.5 + 0.038 \left( 0.16 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right)^{-9/5} \right]^2 - \left[ \left(\frac{b}{a}\right) (1 - 2 \cos \xi) - 1 \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{2\pi^2}{Re} \frac{(ka)^2}{\cos^2 \xi (a/b)^2} \quad (5.17)$$

In this equation, it seems that  $\xi$  and  $k$  can be varied independently. In fact, boundary conditions impose a relation between them. The local theory described here cannot give such a relation since it does not take into account the profile of vorticity of the vortices. The problem was solved very recently by Le Dizès and Laporte (2001a), and their results could converge thanks to the experimental results given in this paper. By making a link between the structure of the Kelvin waves at the center of a Gaussian vortex and the structure of the perturbation given by Waleffe in (5.11–5.13), they found an explicit value of the angle  $\xi$  for the first mode of the elliptic instability:

$$\cos \xi = \frac{1}{2} - \frac{2.26 - ka}{14.8} \quad (5.18)$$

Introducing this condition in (5.17) leads to a prediction of the non-dimensionalised growth rate  $\sigma^*$  as function of the non-dimensionalised wave vector  $ka$ . The growth rate only depends on the Reynolds number and on the non-dimensionalised core size  $a/b$ . This prediction will be compared to our experimental results in the next sections.

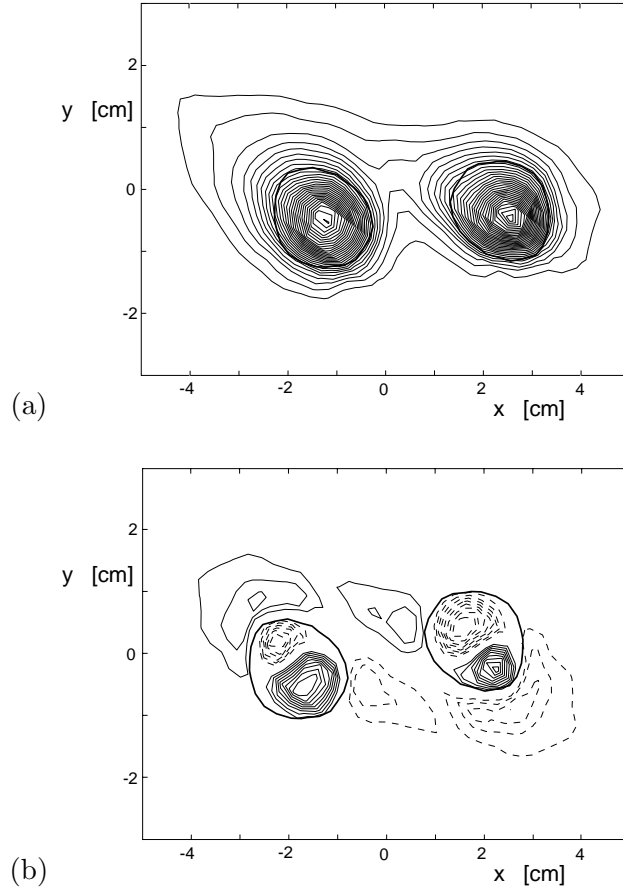


FIG. 5.13 – Axial vorticity contours of the unstable pair, in a plane located at a maximum of the vortex centre displacement. (a) Total flow, (b) perturbation. The bold lines represent the tubes where the vorticity of the perturbation vanishes. Dashed contours represent negative vorticity; difference between two vorticity contours is  $0.4 \text{ s}^{-1}$ .  $\text{Re} = 3350, \lambda = 3.5 \text{ cm}$ .

#### 5.4.2 Spatial structure

Lewke & Williamson (1998) showed that the perturbation (5.11–5.13) found by Waleffe (with  $\xi = 60^\circ$ ) added to the flow of a vortex implies a sinusoidal perturbation of the vortex centerline, in a plane oriented at  $-45^\circ$ . It is exactly what has been observed and described in section 5.3, except that the angle was approximately equal to  $-50^\circ$ . Some numerical simulations measuring the evolution of dye in the time-growing perturbation (5.11–5.13) showed that this difference is only an effect of the visualization process, as mentioned in section 5.4.4.

We now explain the presence of the invariant stream tube mentioned in section 5.3. Due to the form of the Bessel functions, the radial component of the velocity  $u_r$  vanishes for  $k \tan \xi r = 2.7346$ . It indicates that the fluid and the dye are not displaced radially on a circle of diameter  $d_{\text{inv}} = 2 * 2.7346 / k \tan \xi$ . Assuming that we always observe the perturbation with a maximal growth rate, the angle  $\xi$  is given by Eq. (5.16) which leads for



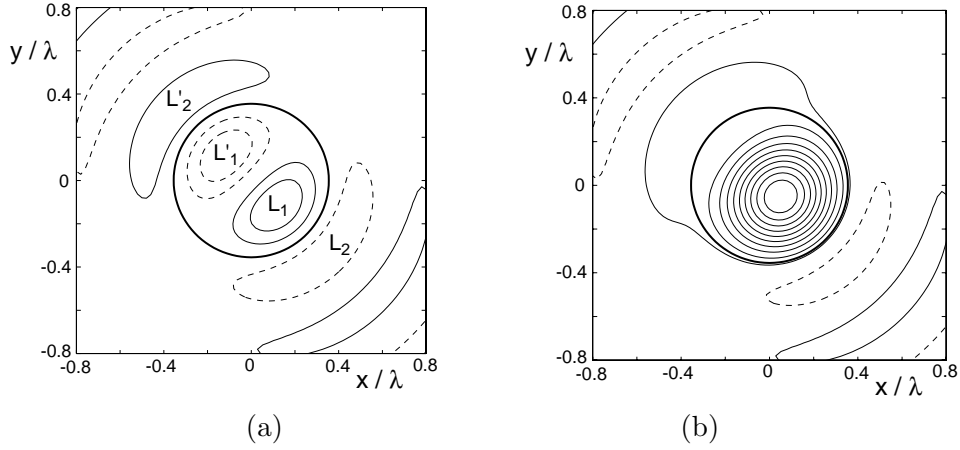


FIG. 5.14 – (a) Theoretical prediction of the axial vorticity found for the elliptic mode defined by (5.14). (b) Superposition of this mode with a Gaussian vortex, whose core size equals:  $a = \lambda/4$ . The perturbation amplitude  $C$  equals half the maximum of the vorticity of the Gaussian vortex. The bold line represents the circle where the perturbation vorticity vanishes.

$a/b = 0.2$  to a ratio between the wavelength and the diameter of the invariant tube:

$$\lambda/d_{\text{inv}} = \frac{\pi \tan \xi}{2.7346} = 2.1995 \quad (5.19)$$

It is slightly larger than in the absence of rotation ( $\xi = 60^\circ$ ), in which case it is equal to 1.9898. This result is in very good agreement with the experimental value given in Eq. (5.6), and explains why the experimental values tend to increase with the presence of rotation.

Figure 5.13(a) shows the global vorticity field in the presence of the instability. It can be observed that the maximum of vorticity of the two vortices are displaced in the  $-45^\circ$  direction. To compare the theoretical perturbation of vorticity to the experimental results, we need to isolate the perturbation from the global vorticity field created by the two vortices. It can be noticed that the perturbation is antisymmetric with respect to the middle point, since the two perturbations are in phase, whereas the vorticity created by the non perturbed vortices is symmetric. The antisymmetric part of the total vorticity field of figure 5.13(a) thus corresponds to the perturbation alone, and is shown on figure 5.13(b). For each vortex, two lobes of vorticity with opposite sign exist inside a circle with zero vorticity, which is outlined in bold on the figure. The lobes are oriented at  $-45^\circ$  with respect to the line joining the vortex centers. Outside each circle, the vorticity changes sign and creates two other lobes of vorticity. There are only two pairs of lobes, indicating that it is the first mode of the elliptic instability (linked to the branch of the Kelvin wave with one zero in the vorticity).

Theoretically, the axial vorticity of the perturbation is given by (5.14). The contours of the axial vorticity of the perturbation are shown in figure 5.14(a). This figure strongly looks like figure 5.13(b). The perturbation vorticity contains two lobes  $L_1$  and  $L'_1$  of opposite vorticity inside a circle

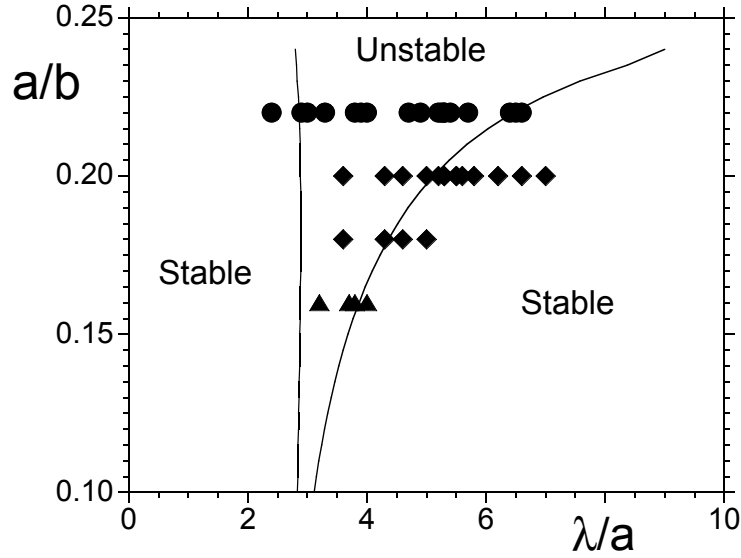


FIG. 5.15 – *Stability diagram for the first mode of the elliptic instability. Symbols represent experimental conditions where exponential growth of the instability was observed.  $Re = 2700$ :  $\bullet$ ;  $Re = 3600$ :  $\blacklozenge$ ;  $Re = 5000$ :  $\blacktriangle$ . Lines are obtained for  $Re = \infty$  using the theoretical predictions (5.17, 5.18).*

of diameter  $d_\omega = 2 * 3.8325/k \tan \xi$ . Outside this circle, the vorticity has an opposite sign, which creates two other lobes  $L_2$  and  $L'_2$ . The other lobes of vorticity found by this local theory are not representative of the flow since this analysis is only valid for small  $r$ . When adding this perturbation to the flow of a Gaussian vortex defined by (5.2), the resulting peak of vorticity is displaced at  $-45^\circ$  (*i.e.* in the stretching direction of the strain), as shown on figure 5.14(b). It compares quite well with the experimental results of figure 5.13(b).

Experimentally, the ratio between the wavelength  $\lambda$  and the diameter  $d_\omega$  of the circle where the vorticity vanishes can be measured as:

$$\lambda/d_\omega = 1.85 \pm 0.20 \quad (5.20)$$

which is slightly larger than the value 1.5694 found theoretically for  $a/b = 0.2$ . The difference might come from the fact that this local theory is only valid at the center of the vortices. The structure of the perturbation might be slightly different for larger radius  $r$ , where we calculate the diameter of the tube.

### 5.4.3 Wavelength

By varying the wavelength of the excitation and the Reynolds number, we have observed the instability at different values of the ratio  $a/b$  and the non-dimensionalised wavelength  $\lambda/a$ . Figure 5.15 shows the stability diagram obtained from these experiments. Each symbol corresponds to an experiment where the amplitude of the perturbation (measured as explained in section 5.4.4) grows exponentially.

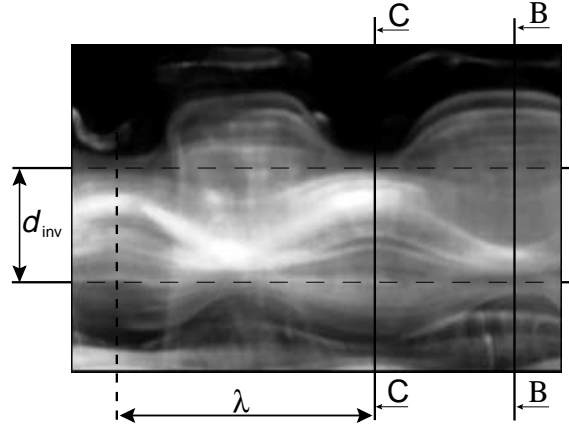


FIG. 5.16 – Close-up view of the three-dimensional instability appearing on one vortex for  $Re \approx 3000$  and  $\lambda = 3.5$  cm. The invariant stream tube has a diameter  $d_{inv}$ . Cross sections B-B and C-C are separated by half a wavelength.

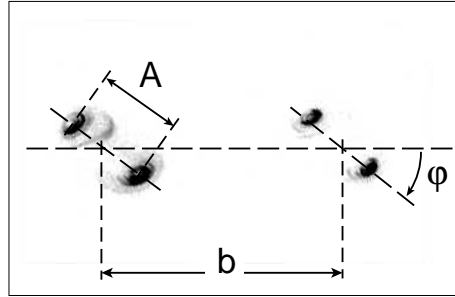


FIG. 5.17 – Simultaneous visualisation of the two sections B-B and C-C of Figure 5.16, for  $Re = 3600$  and  $\lambda = 3$  cm. Each vortex shows two centres (corresponding to the two images in sections B-B and C-C), separated by twice the amplitude  $A$  of the waviness.

It can be observed that the band of instability becomes very large when  $a/b$  grows. It comes from the fact that the inner strain  $\varepsilon_{int}$  get very large (see Eq. 5.9) in the presence of strong rotation. This is why the band of unstable wavelength is much larger than in the typical elliptic instability without rotation. It can be mentioned that this result greatly helped the theoretical prediction given in section 5.4.1 to converge. The theoretical prediction is plotted for the inviscid case. It is in good agreement with the experimental results, even if the experiments seem slightly more unstable, especially at  $Re = 3600$ . This might be due to the fact that the profiles of vorticity are not exactly Gaussian (see figure 5.4a), and the effective core size might be slightly larger, which would translate the experimental results to the left and to the top, *i.e.* in the good direction. When  $a/b$  tends to zero, the unstable band  $\Delta\lambda$  get narrower, and is centered around  $ka = 2.26$ , as in the absence of rotation (see Eloy & Le Dizès 1999).

For finite Reynolds numbers, the unstable domain found theoretically (which is not drawn here) only appears for high ratios  $a/b$ , above a critical ratio  $(a/b)_c$ . It introduces a cut-off of the instability at small  $a/b$ . This

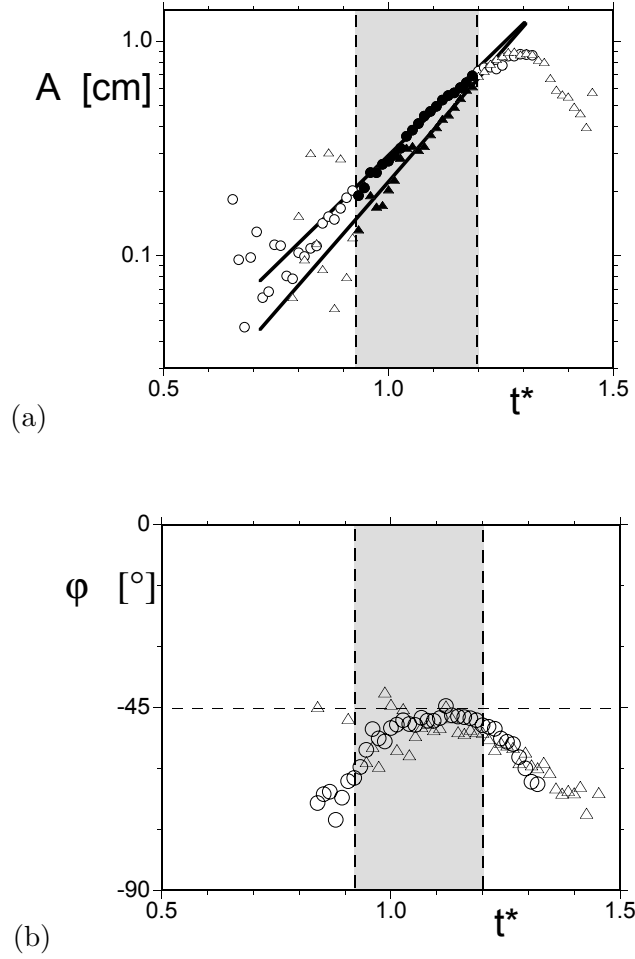


FIG. 5.18 – (a) Amplitude of the vortex centre line perturbation for  $Re = 3600$  and  $a/b = 0.2$ , which represents the average value in the shaded time interval. The fit gives growth rates of  $\sigma^* = 4.8$  for the first vortex ( $\circ$ ) and  $\sigma^* = 5.5$  for the second ( $\triangle$ ). (b) Angle  $\varphi$  defined in Figure 5.17, between the line joining the two vortices and the plane of the perturbation.

cut-off ratio decreases with the Reynolds number, and vanishes for infinite Reynolds numbers. It is in agreement with the experimental observation that the instability appears at smaller and smaller  $a/b$ , for increasing Reynolds numbers (see figure 5.15).

#### 5.4.4 Growth rate

As illustrated in figure 5.16, we have illuminated the flow with two sections (B-B) and (C-C), separated from half a wavelength simultaneously. It gives pictures such as in figure 5.17, where each vortex has two images, corresponding to each section. Since the sections (B-B) and (C-C) are located at the minimum and maximum of the centerline perturbation, it is possible to measure the amplitude  $A(t)$  of the waviness of the dye and the angle  $\varphi(t)$  of the plane containing the perturbation. These results are shown in

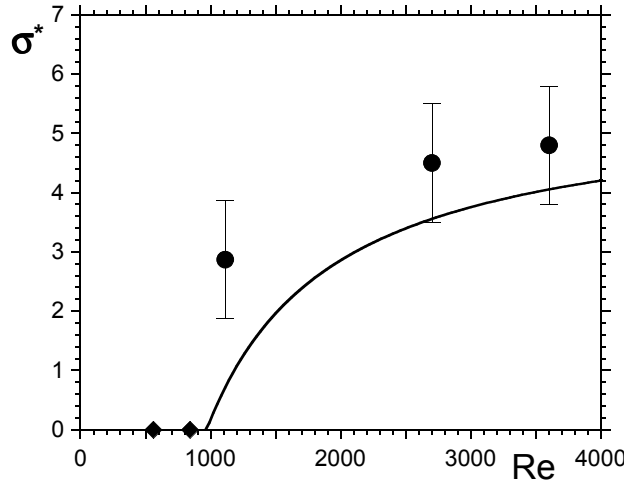


FIG. 5.19 – Growth rate of the instability obtained for different Reynolds numbers. The black squares (■) represent experiments without visible evidence of an instability. The line corresponds to the theoretical prediction obtained using (5.17, 5.18) with  $\lambda/a = 4$  and  $a/b = 0.21$ , which is representative for the experimental conditions of this series.

figure 5.18.

The angle  $\varphi(t)$  is fairly constant, when the amplitude is large enough for the perturbation to be well measured, with a mean value of  $-50^\circ$ . This small difference with the theoretical prediction of  $\varphi = -45^\circ$  can be explained by numerical simulation of dye in the time growing perturbation given by Eqs. (5.11–5.13).

The amplitude  $A(t)$  is measurable only when it is large enough, so that the two images of each vortex (see figure 5.17) can be distinguished. The evolution of  $A(t)$  is shown on figure 5.18(a) and proves that it grows exponentially during a period of 1–2 seconds. A least-square fit gives the growth rate of  $A(t)$ , which is equal to the growth rate of the mode of the instability (the equivalence is proved in section 5.2.3). Figure 5.19 shows the growth rate as function of the Reynolds number. The instability is damped by viscous effects at low Reynolds numbers. Above a threshold found at  $Re \simeq 1000$ , the growth rate rapidly increases, with the Reynolds number, and then saturate at a value close to 5. This picture is in good qualitative agreement with the theoretical prediction, even if the experimental values of the growth rate seem to be slightly larger.

We are now going to analyse the dependence of the growth rate on the non-dimensionalised core size  $a/b$ , which can be varied by measuring the growth rate at different times (since  $a/b$  increases with time) and at different Reynolds numbers (since the instability appears earlier for higher Reynolds number). Figure 5.20 shows the maximal growth rate as function of the ratio  $a/b$ . The growth rate increases with  $a/b$ , despite the fact that the Reynolds number used for the experiments slightly increases with  $a/b$ . This is a new and interesting result, and is due to growth of the inner strain  $\varepsilon_{\text{int}}$  with  $a/b$ . It is in qualitative agreement with the theoretical predictions, which again

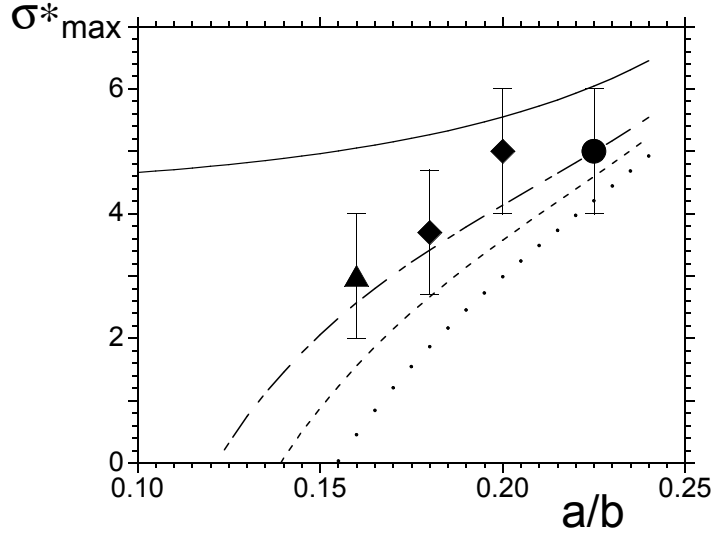


FIG. 5.20 – Maximum growth rate of the instability obtained experimentally at different ratios  $a/b$ , for  $Re = 5000$  ( $\blacktriangle$ ),  $Re = 3600$  ( $\blacklozenge$ ), and  $Re = 2700$  ( $\bullet$ ). The lines correspond to theoretical predictions for infinite Reynolds number (solid line),  $Re = 5000$  (dash-dotted line),  $Re = 3600$  (dashed line), and  $Re = 2700$  (dotted line) using (5.18, 5.17).

underestimate the value of the growth rate. It might be due to the fact that merging can slightly increase the growth rates or that the vorticity profile of the initial vortices are not exactly Gaussian, which could slightly increase the effective core size  $a$  as mentioned in section 5.4.3.

Finally, we were able to measure the growth rate as function of the wavelength for  $a/b = 0.22$ , which is plotted in figure 5.21. The dispersion in the results is large, showing the difficulty of such an experimental measuring. This result has never been given in the literature for vortices in an open flow, even in the absence of rotation of the vortex pair. The results are in agreement with the theoretical prediction, even if the experimental growth rates are slightly larger.

#### 5.4.5 Symmetric mode of the elliptic instability

We mentioned at the end of section 5.3 that a symmetric perturbation of the vortices is observed in a very narrow band of the parameters at  $\lambda/a = 3.4$  and  $a/b = 0.22$ . The unstable band for the usual antisymmetric perturbation is observed for  $\lambda/a$  varying between 3.5 and 7.5. For such a high  $a/b$ , the theory predicts the existence of a second unstable band at smaller wavelengths, corresponding to the second Kelvin wave. The symmetric perturbation seems to be observed for a wavelength included in both unstable bands, which overlap for high ratios  $a/b$ . For the second band, the radial velocity changes sign twice. Thus, if the perturbation of one vortex is linked to the first Kelvin wave and the perturbation of the second one is linked to the second Kelvin wave, the radial velocity changes sign three times

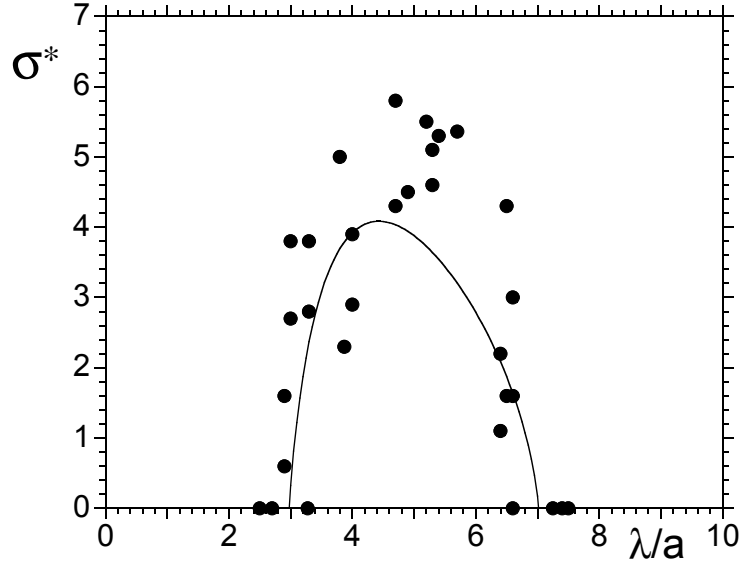


FIG. 5.21 – Non-dimensional growth rate as function of the wavelength, for  $Re = 2700$  and  $a/b = 0.22$ . The solid line corresponds to the theoretical prediction of Le Dizès & Laporte (2001).

on the line joining the vortices, which creates a symmetric perturbation.

However, the growth rate was measured to be extremely high:

$$\sigma^* = 8.5 \pm 1.5 \quad (5.21)$$

whereas a theoretical prediction made using (5.17, 5.18) gives a maximum value of 4.48 (resp. 1.86) for the growth rate using the first (resp. second) mode at  $a/b = 0.22$ . For the second band, equation (5.18) has different constants as mentioned by Le Dizès *et al.* (2001a). The discrepancy could come from the effect of the merging, which can highly increase the growth rate.

## 5.5 Late stages and merging

In the two previous sections, we have described in detail the characteristics of the instability in its initial linear stage, for which comparison with theoretical predictions concerning elliptic instability of a single vortex in a rotating strain were possible. In the following, we focus on the later stages of the flow, which are specific to the co-rotating vortex pair, and in particular the effect of the three-dimensional instability on vortex merging.

### 5.5.1 Onset of merging

When the amplitude of the instability mode gets sufficiently large. In the presence of instability, the beginning of merging, *i.e.* the start of the decrease of the separation distance  $b$ , seems to depend on this instability

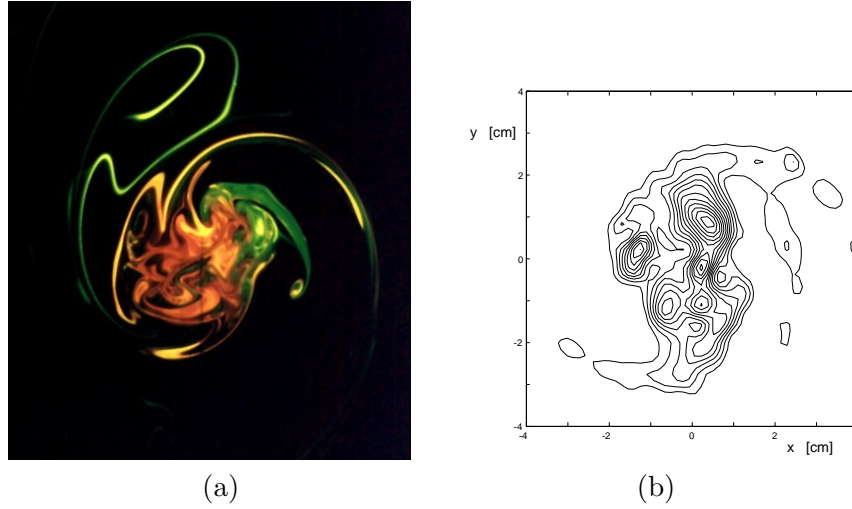


FIG. 5.22 – *Cross-cut view of the turbulent final vortex. (a) Dye visualisation for  $Re \approx 3000$  and  $\lambda = 3.5$  cm. (b) Vorticity contours at  $t^* = 1.6$ , for  $Re = 3600$  and  $\lambda = 4.5$  cm.*

amplitude rather than the relative core size  $a/b$ . Indeed, it has been observed in this study for  $a/b$  as small as 0.19, whereas Meunier *et al.* (2001b) found that merging initiates only when  $a/b$  reaches the critical value of 0.24 in the absence of a three-dimensional instability (see figure 5.26). This different behaviour can be explained by the fact that, in the presence of the instability, some vorticity is shifted radially away from its initial vortex by the perturbation (see figure 5.13a). It is possible that this vorticity crosses the streamline separating the vortex from the outer flow, in which case it is carried away into filaments, which are ejected from the vortex pair. Such filaments, which are well known in the two-dimensional case, are visible at the end of the merging stage in figure 5.22(b). For the conservation of the angular momentum of vorticity, the two vortices need to get closer when the filaments are ejected, and merging begins. This is why the creation of these filaments by the instability leads to an earlier merging.

### 5.5.2 A transient turbulent state

During and immediately after the merging process, the vorticity field, shown in figure 5.22(b), has a very chaotic structure. This almost turbulent behaviour, involving small-scale structures, is even more visible in the cross-cut dye visualisations in figure 5.22(a) and in a sideview in figure 5.23. In these visualisations, the dye filaments have been stretched and bent in a disorganized way. Moreover, they seem to have smaller radii than the primary vortices. Indeed, the vorticity field of figure 5.22(b) contains 5 separate vortices of small size, embedded in a large area of disorganized vorticity.

These small structures seem to be the signature of secondary vortices, which have been stretched by the primary vortices. Indeed, when a thin vorticity tube gets near the hyperbolic stagnation point between the two vortices, it can be stretched significantly, so that its radius decreases and its



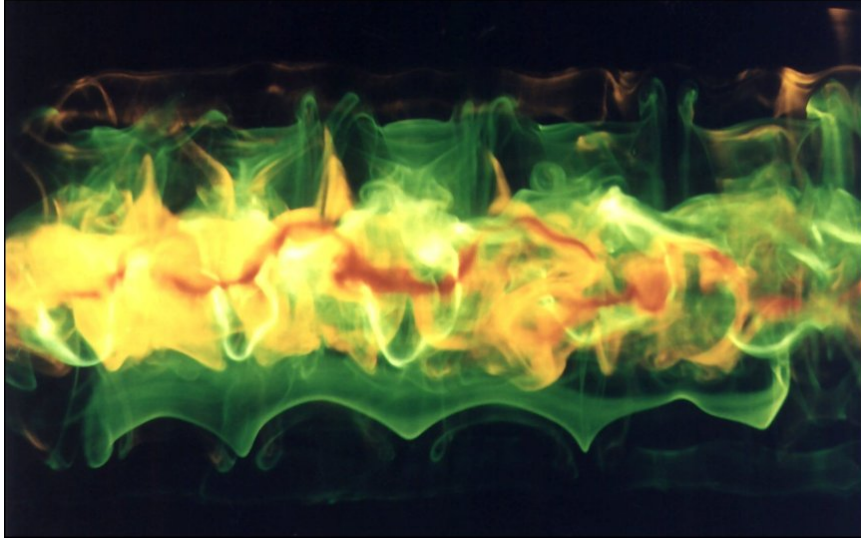


FIG. 5.23 – *Side view visualization of the turbulent final vortex, after merging of the two vortices in the presence of the elliptic instability.  $Re \approx 2000$ .*

length and vorticity level increase. It is then advected by the global flow and tends to roll up around the vortex pair. Such secondary vortices are very well visible in figure 5.24, where the dye tubes are the signature of these transverse secondary structures.

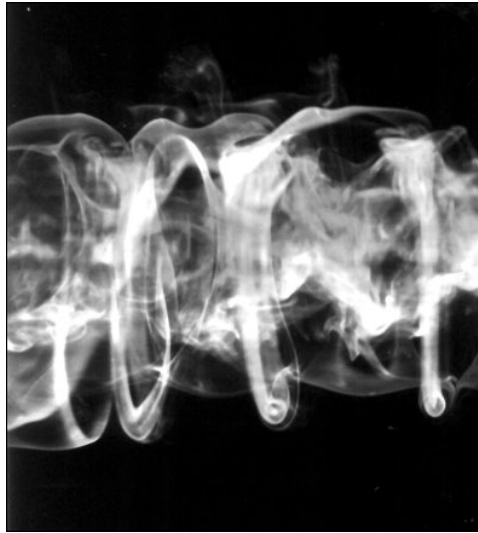


FIG. 5.24 – *Close-up view of the secondary vortices, which are stretched around the final vortex.  $Re \approx 3000$  and  $\lambda = 3.5$  cm.*

### 5.5.3 Relaminarisation of the final vortex

Once the merging is finished, the final vortex reorganises into a more symmetric structure, as shown in figure 5.25. The dye and vorticity struc-

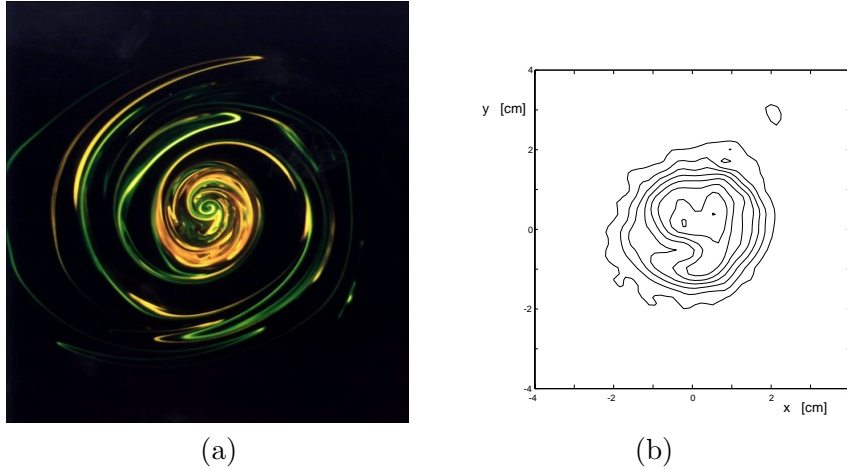


FIG. 5.25 – *Cross-cut view of the final vortex after relaminarisation, in the case of merging with the elliptic instability. (a) Dye visualisation for  $Re \approx 3000$  and  $\lambda = 3.5$  cm. (b) Vorticity contours at  $t^* = 2.2$ , for  $Re = 3600$  and  $\lambda = 4.5$  cm.*

tures are stretched and roll up around the final vortex due to the differential rotation of the global flow. This leads to an axisymmetrization of the final vortex, as described by Melander & McWilliams (1987). In the vortex centre, the flow is almost in solid body rotation, and it takes a longer time for the axisymmetrization process to be effective. When the vorticity filaments are close enough, the diffusion process smoothes the vorticity distribution into an axisymmetric distribution. It takes longer for the dye pattern to be smoothed since the diffusivity of the dyes is orders of magnitude lower than the kinematic viscosity of the fluid.

As for two-dimensional flow, the profile of vorticity of the final vortex is not Gaussian, but it is still possible to define a core size, using the procedure described in section 5.2.2, by measuring the radius at which the azimuthal averaged velocity is maximum. The evolution of the square of the core size is shown in figure 5.26, as function of the viscous time, and compared to the case of merging without instability. In the latter situation, merging set in at  $a/b \approx 0.24$ , and the area of the final vortex is about twice as large as the one of each initial vortex. In the presence of instability, figure 5.26 clearly shows that merging starts earlier, *i.e.* for lower  $a/b$ , and that the core area more than triples during this process. The net result, as far as these measurements show, and if one assumes that the relaminarised vortex area evolves similar to the one of a Gaussian vortex (equation 5.3), is that the final vortex appears to be larger than it would have been without instability. Due to the disturbances induced by end effects in our experimental set-up, the evolution of the flow could not be followed long enough to obtain more precise results at these late stages.

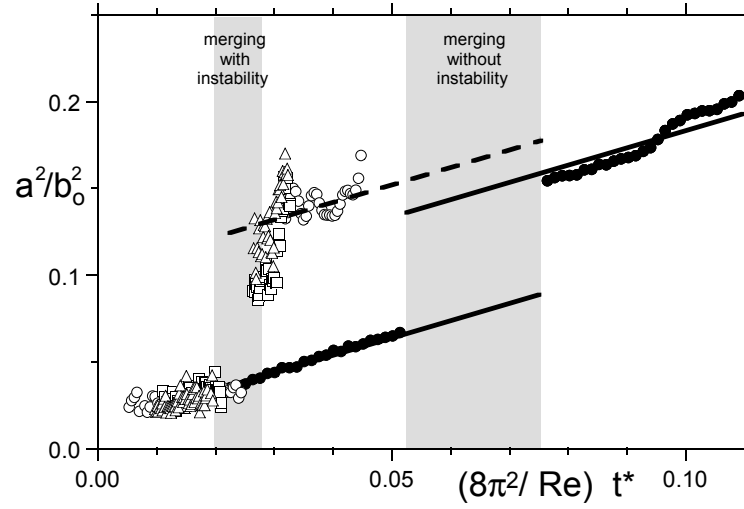


FIG. 5.26 – Evolution of the square of the non-dimensional core radius  $a/b$ , as function of the non-dimensional viscous time. In the presence of the instability (filled symbols), merging appears earlier than in the absence of the instability (white symbols).  $\bullet$ :  $Re = 1506$ ;  $\circ$ :  $Re = 3350$  and  $\lambda = 3.5$  cm;  $\square$ :  $Re = 5000$  and  $\lambda = 2.3$  cm;  $\triangle$ :  $Re = 5000$  and  $\lambda = 2.7$  cm.

## 5.6 Conclusion

In this paper, we have presented experimental results concerning the short-wavelength elliptic instability of a pair of co-rotating vortices. This three-dimensional instability is here observed for the first time in such a flow, which is characterised by the fact that each vortex experiences a time-dependent rotating external strain. Extensive dye visualizations and measurements using particle image velocimetry allowed us to obtain precise information about the structure and quantitative features of the instability.

The instability consists of three-dimensional internal deformations of the vortex cores, involving a growing waviness of the vortex centre lines and the existence of an invariant streamtube in each core. The perturbation mode is found to be stationary in the frame of reference of the rotating pair and, except for a very narrow range of wavelengths, is antisymmetric with respect to the central point of symmetry of the initial pair. These features are very similar to the ones of the short-wave instability found by Lewke & Williamson (1998) in a counter-rotating vortex pair. As in their case, the mode structure identifies the instability as an elliptic instability of the vortex cores, which is a general mechanism in strained vortical flows, and the symmetry properties can be understood from the matching condition between the perturbations of the two vortices.

The fact that the strain rotates in the present configuration, has some interesting effects on the quantitative instability characteristics. First, the instability occurs for larger wavelengths as for the non-rotating case, which is confirmed by our measurements. Second, the growth rates are higher, which can be understood by an increased internal strain rate at the vortex centre,

due to a modified adaptation of the flow to the rotating external strain. The most striking feature, however, is the dramatic increase of the width of the unstable wavelength interval with increasing rescaled core size  $a/b$ , which characterises the effect of the rotation of the pair, as revealed for the first time by the present measurements.

The experimental stability diagram as function of wavelength and core size, as well as different measurements of the instability wavelength, as function of Reynolds number, core size, and wavelength, were compared to recent theoretical predictions by Le Dizès & Laporte (2001), based on the analysis of a single vortex in a rotating strain. The overall agreement was found to be very good.

The fact that the unstable bands of the elliptic instability widen considerably with increasing rotation, results in the overlapping of different bands, associated with different types of bending modes. This may be related to the observation of a symmetric three-dimensional perturbation for certain parameters. In fact, this mode appeared at the inferior limit of the unstable wavelength interval of the principal mode, at a location, where, in the case of overlapping bands, the second radial mode could also have a positive growth rate. The presence of this second mode in one vortex and the principal one in the other would lead again to a kinematic matching of the perturbations between the vortices, whereas the centre lines would be deformed symmetrically. This is the first time that evidence of the second radial mode of elliptic instability has been detected experimentally in a freely developing strained vortex.

In the late stages of the flow, the perturbations induced by the instability, combined with the specific flow field of the co-rotating vortex pair, lead to the periodic generation and ejection of vorticity filaments. This, in turn, makes the primary cores approach each other, thus initiating the merging process. Due to the strong three-dimensional perturbations, this ‘unstable’ merging leads to a sudden breakdown of the organised structure into small-scale turbulent motion. Visualisations have shown how secondary transverse vortices are generated in this process, which subsequently are wrapped around the outer part of the merging vortex. Measurements reveal that the merging process begins earlier, *i.e.* for smaller core sizes than for the well-known case of two-dimensional flow, and that the final vortex, which in our low-Reynolds number flow rapidly relaminarises, appears to have a larger radius than for stable merging.

The authors wish to thank S. Le Dizès for many helpful discussions during the course of this study. This work was supported by the European Commission under Contract no. GRD1-1999-10332 (C-Wake).

## 6. DIFFUSION D'UN SCALAIRE DANS UNE PAIRE DE TOURBILLONS

### Résumé

Dans ce chapitre, nous analysons l'évolution d'une tache de colorant initialement placée dans un vortex de la paire. Nous construisons un modèle théorique qui analyse le colorant comme un scalaire passif soumis à l'étirement d'un vortex ponctuel et à de la diffusion. Pour les temps supérieurs au temps de mélange, la concentration maximale du colorant décroît comme  $t^{-3/2}$ , ce qui est caractéristique de l'hyperdiffusion en présence d'un étirement. Le modèle est en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux, mais prévoit une décroissance légèrement trop forte des concentrations. Cela s'explique par le fait que le vortex expérimental n'est pas ponctuel mais Gaussien, et que l'étirement est donc moindre que celui supposé théoriquement.

Nous déduisons de ce modèle la densité de probabilité (PDF) de concentration du colorant en fonction du temps. Curieusement, la forme de cette PDF ne varie pas au cours du temps, bien que la concentration en chaque point du vortex chute fortement. Cette décroissance de la concentration entraîne simplement une coupure de plus en plus importante de la PDF aux concentrations élevées. L'accord avec les résultats expérimentaux est excellent aux temps courts, et reste partiel aux temps longs.

Enfin, nous analysons l'évolution de ces PDF au cours de la fusion. Dans le cas de la fusion laminaire sans instabilité tridimensionnelle, les PDF ne changent pas de manière visible. Par contre, lors de la fusion en présence d'une instabilité tridimensionnelle, les concentrations de colorant sont fortement diminuées d'un facteur proche de 0.6. De plus, il semble que la PDF se convolve avec elle-même lors de la fusion turbulente, ce qui traduit le mélange de la tache de colorant avec elle-même, liée à une interpénétration des filets de colorant.

---

Nous allons étudier l'évolution d'une tache de colorant dans le champ de vitesse de la paire de vortex. Le colorant représente un scalaire passif, advecté et étiré par le vortex, qui est aussi soumis à de la diffusion. Ranz (1979) puis Marble (1988) et Villiermaux & Rehab (2000) ont montré que la

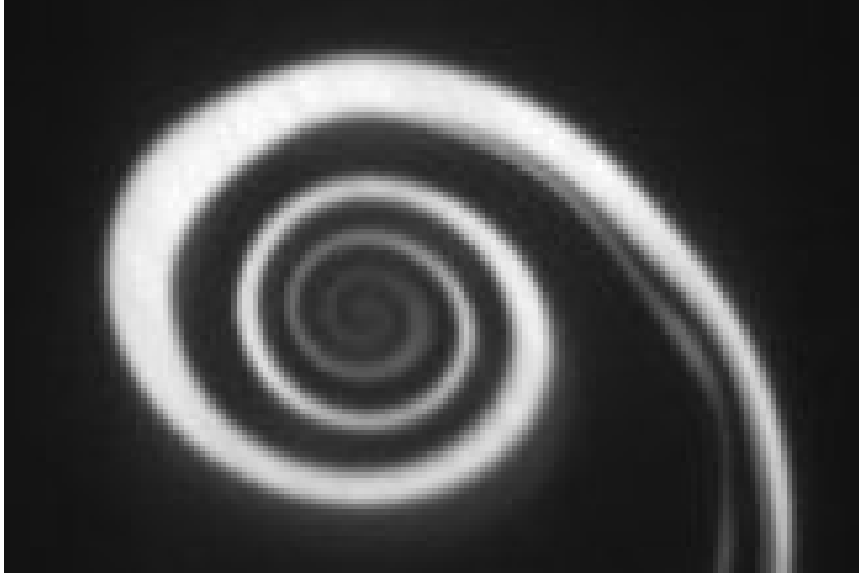


FIG. 6.1 – Exemple de visualisation de l'enroulement du colorant dans un vortex juste après sa formation. L'image a pour dimensions  $16 \times 10 \text{ cm}^2$  et est prise à  $t = 1 \text{ s}$  pour un vortex de circulation  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

présence d'un étirement du colorant mène à de l'hyperdiffusion. Cela a été vérifié dans le cas d'un vortex par Flohr & Vassilicos (1997), qui calculent explicitement la décroissance de la variance du scalaire aux temps courts. Nous voulons maintenant évaluer la concentration du scalaire par des méthodes statistiques, afin de pouvoir suivre l'évolution du scalaire au cours de la fusion en présence ou en l'absence de l'instabilité. Nous allons donc calculer les densités de probabilité (PDF) de la concentration du colorant.

### 6.1 Enroulement d'une tache de colorant dans un vortex

La figure 6.1 montre l'évolution d'une tache de colorant, placée dans le champ de vitesse d'un vortex. Elle s'enroule rapidement en une spirale autour du centre du vortex, à cause de la vitesse azimutale du tourbillon. Le colorant proche du centre est une bande plus étroite et moins lumineuse que loin du centre. Cela tend à dire que le colorant diffuse plus rapidement au centre qu'à l'extérieur. Il faut donc regarder précisément comment le colorant diffuse en fonction du rayon. Il est à noter que la résolution de l'image est suffisante, car la spirale est assez large (au moins 4 pixels) pour que sa luminosité soit correctement mesurée.

Nous avons vu au chapitre 2 comment relier la luminosité de l'image à la concentration en colorant au moyen de la formule (2.16).

### 6.2 Diffusion accélérée du colorant

D'une manière générale, nous allons calculer l'évolution d'une tache de colorant de diamètre  $s_0$ , placée dans le champ de vitesse d'un vortex ponctuel

de circulation  $\Gamma$  (voir figure 6.2a), dont la vitesse azimutale est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.1)$$

Le calcul est aisément généralisable à un champ de vitesse proportionnel à  $r^{-\alpha}$ , mais nous n'avons considéré que le cas  $\alpha = 1$  car il est représentatif de notre cas expérimental. De plus, le résultat final dépend très peu de la valeur de  $\alpha$ . La concentration du colorant est soumise à de la diffusion, paramétrée par un coefficient de diffusivité  $\kappa$ , qui vaut  $5.10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  pour la Fluorescéine dans l'eau.

Chaque point de la tache, situé à une distance  $r$  du centre du vortex, tourne pendant un temps  $t$  d'un angle  $\varphi$  autour du centre du vortex :

$$\varphi(r, t) = \int_0^t \frac{v_\varphi}{r} dt = \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \quad (6.2)$$

Considérons la tranche d'épaisseur  $dr$ , située à une distance  $r$  du centre du vortex, qui est représentée en gris dans la figure 6.2(a). Cette bande est étirée par le champ de vitesse, et sa largeur initialement égale à  $dr$  vaut maintenant :

$$dl(r, t) = \sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2} = \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2 t^2}{\pi^2 r^4}} dr \quad (6.3)$$

On appelle  $s(t)$  l'épaisseur de striation de la bande, qui représente l'épaisseur de la bande de colorant en l'absence de diffusion. L'aire de la surface grisée de la figure 6.2 est exactement égale à  $dl(t)s(t)$ . Cette aire est conservée au cours du temps dans un écoulement bidimensionnel incompressible, puisqu'elle correspond à l'aire de l'élément de fluide. On obtient donc la valeur de l'épaisseur de striation :

$$s(t) = \frac{s_0 dr}{dl} = \frac{s_0}{\sqrt{1 + \frac{\Gamma^2 t^2}{\pi^2 r^4}}} \quad (6.4)$$

L'épaisseur de striation  $s(t)$  décroît très vite avec le temps. Les phénomènes diffusifs sont alors accélérés car ils agissent plus vite sur des échelles spatiales petites. En présence de diffusion, le colorant s'étale donc sur une épaisseur plus large que  $s(t)$ . Nous allons maintenant calculer exactement le champ de concentration du colorant en présence de diffusion.

Localement, le champ de vitesse est un champ de compression perpendiculaire à la bande de colorant. Il est pratique d'introduire un nouveau référentiel  $(O, X, Y)$  dont l'axe  $(OX)$  est aligné avec la bande de colorant (voir figure 6.2b). Dans ce référentiel, le champ de vitesse s'écrit :

$$\begin{cases} U = -\frac{X}{s} \frac{ds}{dt} \\ V = \frac{Y}{s} \frac{ds}{dt} \end{cases} \quad (6.5)$$

et l'équation d'évolution de la concentration  $c$  de colorant est donnée par :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial X} + V \frac{\partial c}{\partial Y} = \kappa \left( \frac{\partial^2 c}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \right) \quad (6.6)$$

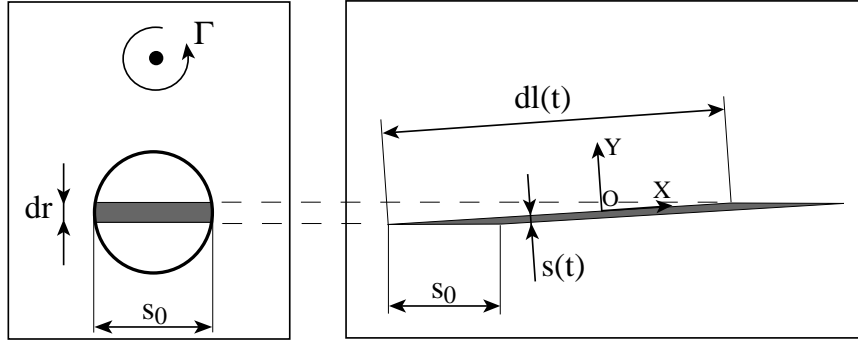


FIG. 6.2 – Schéma explicatif de l'étirement d'une tache de colorant par un vortex ponctuel. (a) Forme de la tache à l'instant initial. (b) Epaisseur de la spirale à un instant  $t$  ultérieur.

La concentration  $c$  varie peu le long de la spirale. Les gradients suivant  $X$  sont donc négligeables devant les gradients suivant  $Y$ . L'équation (6.6) se simplifie alors, et devient, en introduisant la valeur du champ de vitesse :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{Y}{s} \frac{ds}{dt} \frac{\partial c}{\partial Y} = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \quad (6.7)$$

Les conditions initiales sont très simples, puisqu'à  $t = 0$  l'axe ( $OY$ ) est horizontal sur la figure 6.2(a). Le colorant est compris dans une bande de largeur  $s_0$ . La concentration  $c$  vaut donc  $c_0$  si  $|Y| < s_0/2$  et vaut 0 si  $|Y| > s_0/2$ . L'équation (6.7) peut être résolue très simplement (Ranz 1979, Marble 1988) en introduisant un changement de variable approprié :

$$\begin{cases} \tau = \int_0^t \frac{\kappa dt'}{s(t')^2} \\ \xi = \frac{Y}{s(t)} \end{cases} \quad (6.8)$$

Cela veut dire que les distances sont renormalisées par l'épaisseur de striation  $s$ , et que les temps sont renormalisés par le temps visqueux  $\kappa/s^2$ . Le nouveau temps  $\tau$  peut être calculé facilement :

$$\tau = \frac{\kappa t}{s_0^2} + \frac{\kappa \Gamma^2 t^3}{3\pi^2 r^4 s_0^2} \quad (6.9)$$

Très rapidement,  $t$  est suffisamment grand ( $t \gg r^2/\Gamma$ ) pour que le premier terme soit négligeable : pour  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et  $r = 0.5 \text{ cm}$ , c'est le cas dès que  $t \gg 5 \mu\text{s}$ . Le nouveau temps varie alors comme  $t^3$ , ce qui fait apparaître de l'hyperdiffusion puisque la diffusion agit sur une échelle de temps  $\tau$ , qui augmente beaucoup plus vite que le temps  $t$ .

Dans ces nouvelles variables, l'équation d'évolution de la concentration  $c$  donnée par (6.7) se transforme en une équation de diffusion standard :

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \quad (6.10)$$



Les conditions initiales à  $\tau = 0$  sont :

$$\begin{cases} c = c_0 & \text{pour } |\xi| < 1/2 \\ c = 0 & \text{pour } |\xi| > 1/2 \end{cases} \quad (6.11)$$

La solution est donnée par une différence de deux fonctions erreur :

$$c = \frac{c_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\xi + 1/2}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi - 1/2}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (6.12)$$

La concentration maximale  $c_M$  est obtenue en  $\xi = 0$ , c'est-à-dire au centre de la bande de colorant :

$$c_M = c_0 \operatorname{erf} \left( \frac{1}{4\sqrt{\tau}} \right) \quad (6.13)$$

Aux temps courts, la concentration maximale est constante, égale à  $c_0$ . Dès que  $4\sqrt{\tau}$  est supérieur à 1, elle décroît comme  $1/\sqrt{\tau}$ , ce qui est représentatif de la diffusion normale dans cette échelle de temps. Dans les anciennes variables  $(t, r)$ , la concentration maximale s'écrit :

$$c_M(r, t) = c_0 \operatorname{erf} \left( \frac{1}{4\sqrt{\frac{\kappa t}{s_0^2} + \frac{\kappa \Gamma^2 t^3}{3\pi^2 r^4 s_0^2}}} \right) \quad (6.14)$$

Aux temps courts, la concentration maximale est égale à  $c_0$ . Ensuite, elle décroît comme  $t^{-3/2}$  dès que l'on atteint le temps de mélange  $t_s$  défini par :

$$t_s = \frac{r^2}{\Gamma} \left( \frac{3\pi^2}{16} \right)^{1/3} \left( \frac{s_0}{r} \right)^{2/3} \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{1/3} \quad (6.15)$$

En définissant le nombre de Péclet par la circulation du vortex ( $\text{Pe} = \Gamma/\kappa$ ), ce temps de mélange varie comme  $\text{Pe}^{1/3}$ , ce qui est caractéristique des phénomènes de diffusion-étirement (voir Rhines & Young 1983).

La concentration maximale est tracée à un instant donné en fonction du rayon dans la figure 6.3. Pour comparer la prédiction théorique aux valeurs expérimentales, nous avons pris une circulation  $\Gamma$  du vortex donnée par la valeur expérimentale ( $45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ). La figure est tracée à un temps court ( $t = 1 \text{ s}$ ) pour lequel la diffusion n'a pas encore agi sur toute la spirale. La diffusivité est prise égale à  $\kappa = 5.10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Pour les rayons élevés, l'étirement reste faible et le temps  $\tau$  est donc faible, ce qui entraîne que la concentration reste égale à  $c_0$ . Cet effet est bien visible sur la photo de la figure 6.1, où la diffusion n'a pas encore eu lieu aux larges rayons. Par contre, aux faibles rayons, l'étirement est très fort et le temps  $\tau$  est alors grand. La concentration maximale tend ainsi vers 0. Il y a un bon accord qualitatif entre la forme de  $c_M(r)$  théorique et expérimentale. Malheureusement, il faudrait prendre  $t = 0.75 \text{ s}$  dans la formule théorique pour que l'accord entre la théorie et l'expérience soit parfait. Cela vient du fait que le vortex n'est pas exactement ponctuel, mais que la vorticité a eu le temps de diffuser en une distribution proche d'une Gaussienne. Le cœur est alors en rotation solide et l'étirement devient nul au cœur. Cela implique que

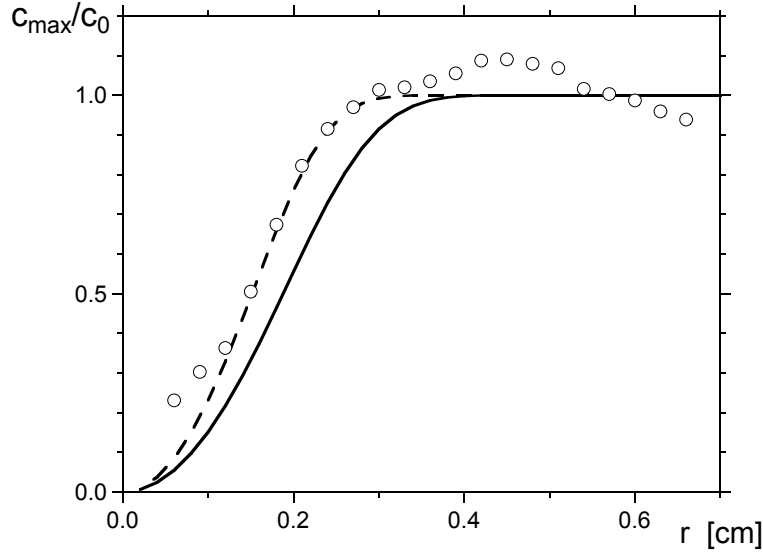


FIG. 6.3 – Concentration maximale obtenue sur la spirale, à différents rayons. Les résultats expérimentaux ( $\circ$ ) sont obtenus à  $t = 1$  s sur l'image de la figure 6.1. La prédiction théorique, issue de (6.14), est obtenue pour un vortex de circulation identique ( $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) à  $t = 1$  s (trait continu) et à  $t = 0.75$  s (trait discontinu).

la diffusion du colorant est ralentie au cœur du vortex, et il est normal que la théorie surestime la décroissance de  $c_M$ . En fait, il est très facile de calculer la concentration d'une tache de colorant dans un vortex Gaussien par le même modèle. Malheureusement, dans ce cas il est impossible d'en déduire la PDF de concentration de colorant. C'est pourquoi nous nous sommes limités au cas d'un vortex ponctuel, même si l'accord avec les résultats expérimentaux semble moins bon.

Dans la figure 6.4, nous avons tracé la concentration maximale à différents instants. Les résultats expérimentaux et théoriques indiquent que la concentration maximale décroît fortement avec le temps, surtout aux rayons faibles. De nouveau, il y'a un bon accord qualitatif entre la prédiction théorique et les résultats expérimentaux. Cependant, comme le modèle ne prend pas en compte la diffusion de la vorticité dans le cœur du vortex, la prédiction théorique prévoit une décroissance trop rapide d'un facteur 2 environ. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que la valeur de la décroissance de  $c_M$  a en fait peu d'influence sur la forme de la PDF de concentration, bien que cela paraisse peu intuitif.

L'épaisseur  $\sigma$  de la bande peut être définie à partir du moment d'ordre deux de la distribution de concentration. Elle se calcule aisément à partir de la formule (6.12). Son carré est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{\int Y^2 c(Y) dY}{\int c(Y) dY} = s^2(t) \frac{\int \xi^2 c(\xi) d\xi}{\int c(\xi) d\xi} = s^2(t) \frac{1 + 24\tau}{6} \quad (6.16)$$

Dans cette formule,  $\tau$  est donné par l'équation (6.9) et  $s(t)$  est donné par (6.4).

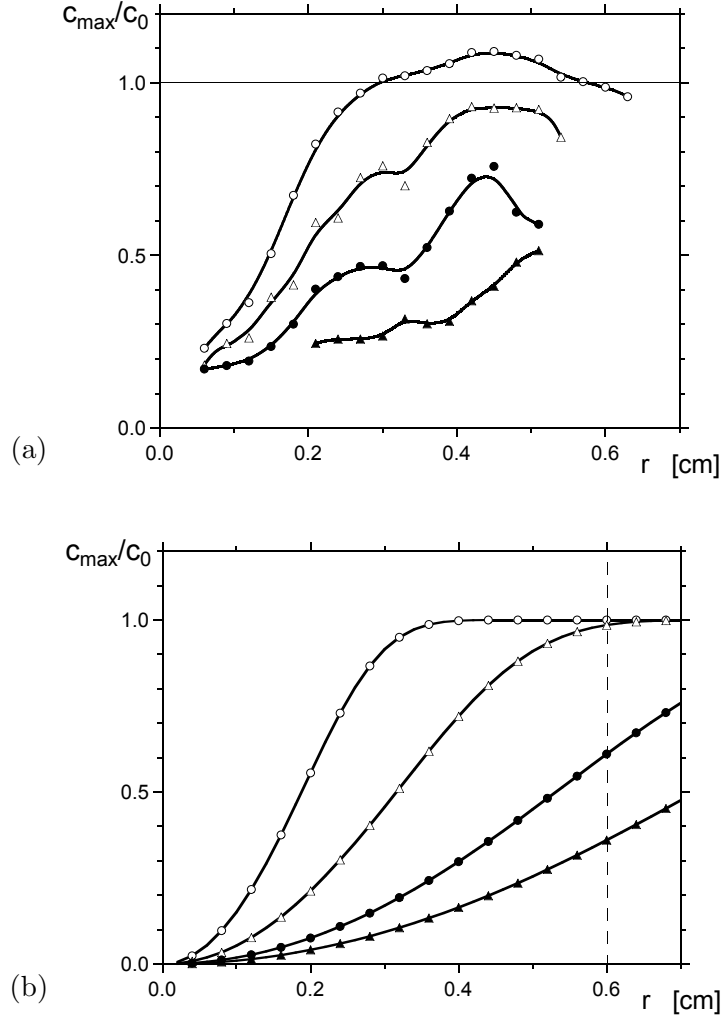


FIG. 6.4 – Concentration maximale de la spirale obtenue (a) expérimentalement, et (b) théoriquement à partir de (6.14) pour un vortex de circulation  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .  $t = 1 \text{ s}$  (○),  $t = 2 \text{ s}$  (△),  $t = 4 \text{ s}$  (●) et  $t = 6 \text{ s}$  (▲).

### 6.3 Densité de probabilité (PDF) du champ scalaire

Nous voulons calculer la PDF de concentration du colorant sur la spirale. Nous allons d'abord analyser l'histogramme de concentration obtenu en un rayon  $r$  donné. Nous supposons que les spirales ne se touchent pas, ce qui est valable lorsque la largeur de la spirale  $\sigma$  est inférieure à la distance entre deux spirales  $2\pi d\varphi/dr$ , c'est-à-dire pour

$$t < t_D = \frac{r^2}{\Gamma} \left( \frac{\pi^4}{3} \right)^{1/3} \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{1/3}$$

On retrouve ici le résultat de Rhines & Young (1983), puisque  $\Gamma/\kappa$  correspond au nombre de Péclet. Sous cette approximation, l'histogramme de concentration est bimodal, avec deux pics de probabilité infinis à  $c = 0$  et à  $c = c_M$ . Il est même possible de montrer que l'histogramme de concentra-

tion est exactement proportionnel à  $(c\sqrt{\log(c/c_M)})^{-1}$  pour une distribution Gaussienne  $c = c_M e^{-\xi^2/4\kappa t}$  de la concentration (qui est obtenue aux temps longs). Le premier pic de probabilité correspond aux niveaux de concentration très faibles, obtenus loin de la spirale, c'est-à-dire pour les  $\xi$  élevés. Nous n'allons pas tenir compte de ces niveaux de concentration car ils interfèrent avec l'histogramme du fond de l'image. Il est aisé de retirer ces niveaux à la main sur les histogrammes expérimentaux en les annulant lorsqu'ils sont en dessous d'une concentration de coupure. Nous préciserons la valeur de cette coupure ultérieurement.

Le deuxième pic de probabilité correspond au fait que la concentration  $c(\xi)$  obtenue dans la formule (6.12) possède une dérivée nulle en  $\xi = 0$ . Il y a donc un nombre infini de points qui possèdent la concentration  $c(\xi = 0) = c_M$ . Le nombre de points qui ont une concentration différente de  $c_M(r)$  est alors négligeable. Cela revient à dire que chaque élément de la spirale, situé à une distance  $r$  du centre, contribue dans l'histogramme en donnant  $dN$  éléments de surface possédant une concentration  $c_M(r)$ , avec  $dN$  proportionnel à l'aire de l'élément de spirale. La spirale ayant une largeur  $\sigma(r)$  et un élément de longueur  $dl$ , le nombre de carrés de surface  $A$  possédant une concentration comprise entre  $c_M(r)$  et  $c_M(r + dr)$  vaut :

$$dN = \sigma(r) \frac{dl}{dr} dr / A \quad (6.17)$$

En appelant  $N(c)$  la densité du nombre de carrés possédant une concentration  $c$ , on trouve par définition que :

$$dN = N(c) dc \quad (6.18)$$

En couplant les équations (6.17) et (6.18), on trouve une densité de concentration :

$$N(c) = \frac{1}{A} \frac{\sigma(r) \frac{dl}{dr}}{\frac{dc}{dr}} \quad (6.19)$$

Dans cette formule,  $r$  correspond au rayon pour lequel la concentration maximale  $c_M(r)$  est égale à la concentration  $c$  à laquelle l'histogramme  $N(c)$  est évalué. Il faut donc inverser la fonction  $c_M(r)$ , donnée par l'Eq. (6.14), pour obtenir l'histogramme  $N(c)$  explicitement en fonction de  $c$ . Cela est possible dans le cas d'un vortex ponctuel puisque la fonction  $c_M(r)$  ne fait intervenir que des puissances de  $r$ . Malheureusement, dans le cas d'un vortex Gaussien,  $c_M(r)$  contient en plus un terme  $e^{-r^2/a^2}$  qui rend la formule non inversible. Dans notre cas,  $r$  est relié à  $c$  par :

$$r = \left\{ \frac{16}{3\pi^2} \frac{\kappa \Gamma^2 t^3}{s_0^2 [\text{erf}^{-1}(c/c_0)]^{-2} - 16\kappa t} \right\}^{1/4} \quad (6.20)$$

Dans cette formule,  $\text{erf}^{-1}$  est l'application inverse de la fonction erreur. En introduisant la forme de  $\sigma$  donnée par (6.16) dans l'équation (6.19), et en

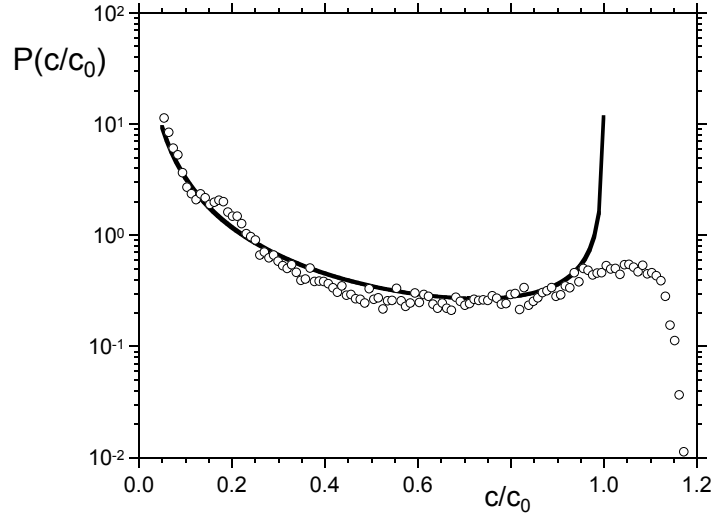


FIG. 6.5 – PDF de concentration expérimentale ( $\circ$ ) et théorique (ligne continue) obtenue pour un colorant dans un vortex de circulation  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  à  $t = 1 \text{ s}$ .

utilisant le fait que  $s(t) \, dl/dr = s_0$ , on trouve une forme explicite pour l'histogramme de concentration en calculant  $dc_M/dr$  par l'équation (6.14) :

$$N(c/c_0) = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{6\pi(1+24\tau)} \, \tau^{3/2} e^{1/16\tau} \, \frac{s_0^2}{A} \, \frac{s_0 r^5}{\kappa \Gamma^2 t^3} \quad (6.21)$$

Dans cette formule,  $\tau$  est donné par l'équation (6.9) en fonction de  $r$  et de  $t$ , et  $r$  est exprimé en fonction de  $c$  par l'équation (6.20). La constante  $A$  correspond maintenant à une constante de normalisation. Elle peut être calculée théoriquement en calculant l'aire totale de la spirale, comprise entre les rayons  $r_1$  et  $r_2$ , qui délimitent la tache de colorant :

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \sigma(r) \, \frac{dl}{dr} \, dr \quad (6.22)$$

Néanmoins, il est plus simple de normaliser les PDF directement sur le résultat de l'équation (6.21), ce qui revient à définir la PDF par :

$$P(c/c_0) = N(c/c_0) / \int_{c_M(r_1)/c_0}^{c_M(r_2)/c_0} N(c/c_0) dc/c_0 \quad (6.23)$$

La figure 2.21 montre que l'histogramme du fond s'étale sur une dizaine de niveaux de gris. Les bas niveaux de concentration sont donc tachés par la présence du pic lié au fond. Pour retirer complètement ces niveaux de gris, nous avons mis l'histogramme expérimental à zéro dès que la concentration correspond à un niveau de gris inférieur à 25. En effet, le nombre de pixels du fond possédant des niveaux de gris supérieur à 25 est négligeable. La coupure a donc été effectuée à une concentration normalisée égale à  $10/(I_0 - 15)$  où  $I_0$  est la luminosité initiale du colorant. Il faut donc redéfinir la PDF théorique donnée par l'équation (6.23) en remplaçant la borne inférieure de

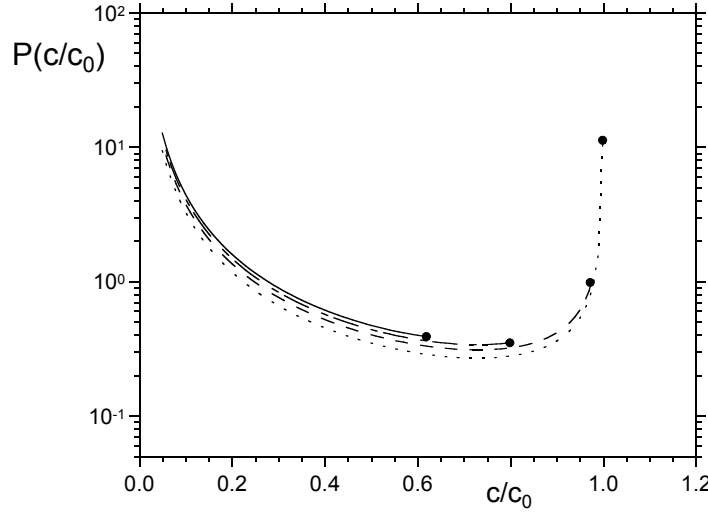


FIG. 6.6 – PDF de concentration d'un scalaire dans un vortex ponctuel, obtenue théoriquement à partir de (6.21). La circulation est prise égale à  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et les temps sont  $t = 1 \text{ s}$  (traits pointillés),  $t = 2 \text{ s}$  (ligne discontinue),  $t = 4 \text{ s}$  (traits mixtes) et  $t = 6 \text{ s}$  (ligne continue). Les points noirs indiquent la concentration maximale à chaque instant, qui est obtenue en  $r_2 = 0.6 \text{ cm}$ .

l'intégrale  $c_M(r_1)/c_0$  par le niveau constant  $10/(I_0 - 15)$ . De cette manière, nous pouvons comparer exactement les PDF expérimentales et théoriques.

La figure 6.5 présente les PDF de concentration normalisées pour le vortex de la figure 6.1, c'est-à-dire pour une circulation  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  à un temps  $t = 1 \text{ s}$ . Nous avons pris  $r_2 = 0.6 \text{ cm}$  pour la borne supérieure de l'intégrale dans (6.23), mais elle a peu d'influence sur les PDF. On voit qu'il y a un très bon accord entre la théorie et l'expérience pour les concentrations différentes de  $c_0$ . Cela paraît étrange car l'accord entre la concentration maximale  $c_M(r)$  théorique et expérimentale, tracés dans la figure 6.3, semblait uniquement qualitatif. La raison principale est que la forme de la PDF est très peu dépendante du temps, comme on le verra par la suite. Cependant, la PDF expérimentale ne présente pas un réel pic de concentration autour de  $c_0$ , comme la PDF théorique. En revanche, il y a beaucoup de niveaux qui possèdent une concentration proche de  $c_0$ , ce qui montre que le pic de probabilité théorique a été étalé sur les niveaux voisins. Cela se voit très bien sur la photo de la figure 6.1, où la spirale de colorant ne possède pas une luminosité uniforme loin du cœur : il existe des zones plus ou moins claires le long de la spirale, qui entraînent l'étalement du pic dans la PDF. Nous ne savons pas si cela vient d'une non-uniformité spatiale dans la tache de colorant initiale ou d'une mauvaise qualité de l'objectif.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution des PDF en fonction du temps. La figure 6.6 montre les PDF de concentration à différents instants, qui coïncident avec les instants utilisés dans la figure 6.4. Nous avons montré dans cette figure que la concentration chute très rapidement en fonction du temps. Il est intéressant de voir que la forme de la PDF ne dépend presque pas de cette décroissance de la concentration. En effet, la forme

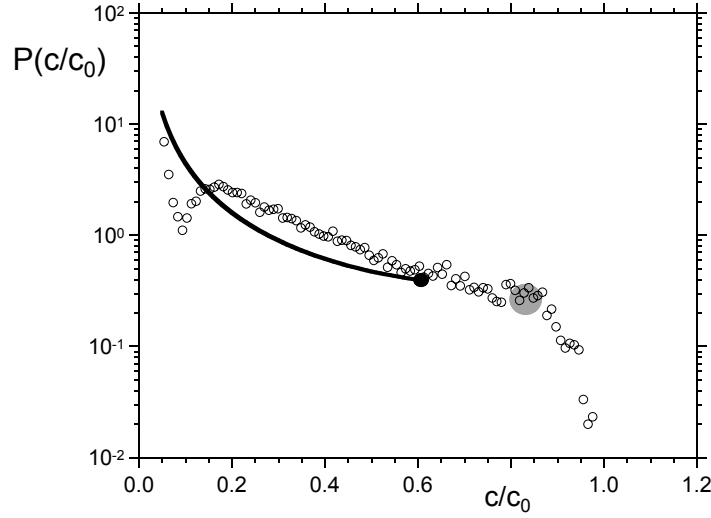


FIG. 6.7 – Comparaison des PDF de concentration théorique (ligne continue) et expérimentale ( $\circ$ ) à  $t = 4$  s. Le point noir (resp. gris) correspond à la concentration maximale théorique (resp. expérimentale).

reste indentique à tout instant. Seule la concentration maximale de la PDF, marquée par un point noir sur la figure 6.6, diminue avec le temps. Cette concentration maximale correspond à la concentration  $c_M(r_2)$  au rayon  $r_2$  et introduit une coupure des fortes concentrations. Aux temps courts,  $c_M(r_2)$  est presque constant et la coupure a peu d'effet. Aux temps longs,  $c_M(r_2)$  décroît rapidement, et la coupure devient de plus en plus importante.

Expérimentalement, le point de concentration maximale diminue moins vite, car le vortex n'est pas ponctuel, mais proche d'un vortex Gaussien. Cet effet est bien visible dans la figure 6.7 qui compare les PDF de concentration expérimentale et théorique aux temps longs, et dans laquelle la concentration maximale expérimentale est localisée par un point gris. Comme expliqué précédemment, cela vient du fait que l'étirement est plus faible au cœur du vortex Gaussien, et la diffusion de la spirale est alors freinée. Cependant, on remarque qu'il existe un défaut dans la PDF expérimentale aux faibles niveaux de concentration : la PDF n'est plus strictement décroissante, mais présente une oscillation pour  $c/c_0$  compris entre 0.05 et 0.15. De plus, l'accord entre la courbe théorique et expérimentale est moins bon, car la PDF expérimentale prend une forme plus proche d'une exponentielle.

#### 6.4 Evolution des densités de probabilité au cours de la fusion

Dans ce paragraphe, nous allons analyser comment évoluent les PDF de concentration de colorant au cours de la fusion en présence et en l'absence de l'instabilité tridimensionnelle.

Avant la fusion, les PDF de concentration de chaque vortex évoluent très peu, car le colorant est essentiellement situé au cœur du vortex, à l'endroit où le fluide est presque en rotation solide. Lors de la fusion, le colorant est advecté par le fluide au même titre que la vorticité et fusionne ainsi dans le

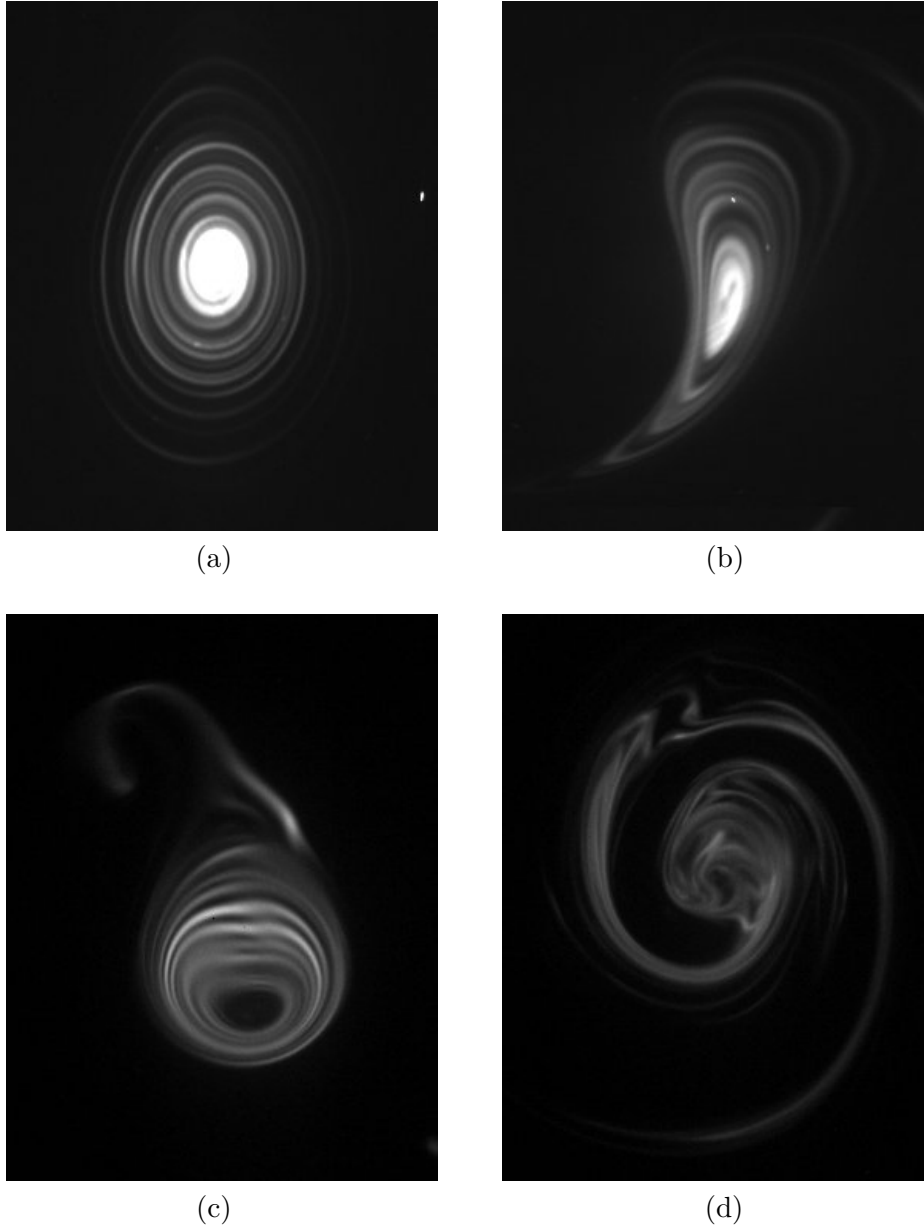


FIG. 6.8 – Images d'un tourbillon unique avant la fusion (à gauche), et après la fusion (à droite). Dans le cas laminaire sans instabilité tridimensionnelle (en haut), la circulation vaut  $\Gamma = 13.5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et les images sont prises à (a)  $t = 16 \text{ s}$  et (b)  $t = 22 \text{ s}$ . Dans le cas turbulent en présence de l'instabilité tridimensionnelle (en bas), la circulation vaut  $\Gamma = 45 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et les images sont prises à (c)  $t = 8 \text{ s}$  et (d)  $t = 11 \text{ s}$ .

tourbillon final. Les figure 6.8(a,b) montrent la forme de la spirale de colorant avant et après la fusion dans le cas laminaire, c'est-à-dire en l'absence de l'instabilité tridimensionnelle. Ces résultats ont été obtenus pour un nombre de Reynolds proche de 1550. La forme de la spirale a été largement modifiée lors de la fusion, car la spirale a perdu sa forme axisymétrique pour occuper uniquement la moitié du tourbillon final. En effet, la seconde moitié serait remplie par le colorant issu de l'autre vortex s'il avait été marqué par du



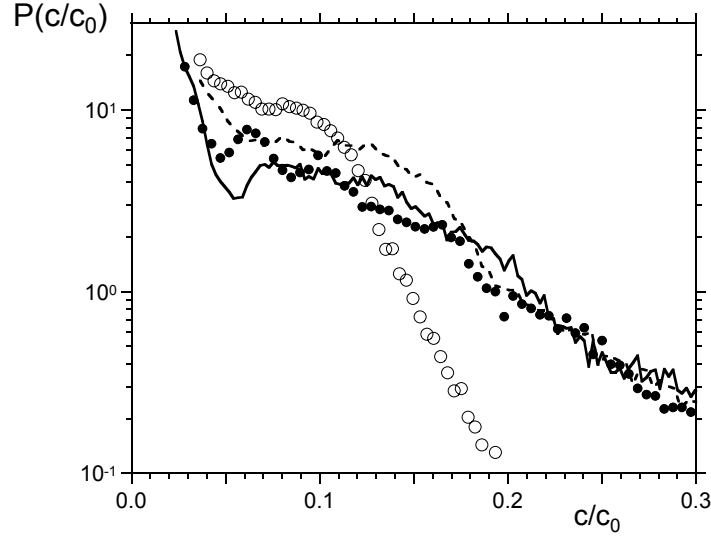


FIG. 6.9 – Comparaison des PDF de concentration du colorant obtenues expérimentalement au cours de la fusion. En l'absence d'instabilité tridimensionnelle, les PDF sont prises avant la fusion (ligne continue) à  $t = 16$  s et après la fusion ( $\bullet$ ) à  $t = 22$  s. En présence d'instabilité, les PDF sont prises avant la fusion (ligne discontinue) à  $t = 8$  s et après la fusion ( $\circ$ ) à  $t = 11$  s.

colorant. Cependant, la luminosité ne semble pas avoir changé beaucoup, et les filets de colorant ne se sont pas mélangés. Il est toujours possible de distinguer deux filets de colorant voisins.

Le cas de la fusion turbulente en présence d'une instabilité tridimensionnelle est présenté dans les figures 6.8(c,d). Ces résultats ont été obtenus pour un nombre de Reynolds proche de 5000, en excitant une longueur d'onde axiale de 2.5 cm, afin d'avoir une bonne reproductibilité de l'écoulement. Après la fusion, la forme de la spirale de colorant a été grandement modifiée, et elle semble moins lumineuse qu'avant la fusion. De plus, les filets de colorant semblent avoir été mélangés au cours de la fusion, car il est difficile de distinguer deux filets de colorant voisins.

Nous allons maintenant étudier ces transitions de manière quantitative grâce aux PDF de concentration. La figure 6.9 montre les PDF de concentration du colorant correspondant aux images de la figure 6.8. Les PDF avant fusion sont tracées par des lignes et semblent relativement analogues. Elles possèdent une pente moyenne semblable. Cela montre que l'instabilité elliptique, qui est relativement avancée à cet instant (cela est visible par une légère dissymétrie sur la figure 6.8c), influe peu sur la valeur de la concentration en colorant. Cela se comprend aisément, car l'instabilité ne fait que déformer légèrement la forme de la spirale de colorant pour la rendre dissymétrique.

La PDF de concentration après fusion est tracée par les symboles ( $\bullet$ ) pour la fusion en l'absence de l'instabilité. Elle est proche des PDF obtenues avant la fusion. Cela prouve que la fusion laminaire modifie très peu la concentration de la spirale, car l'étirement subi par la spirale est faible. La

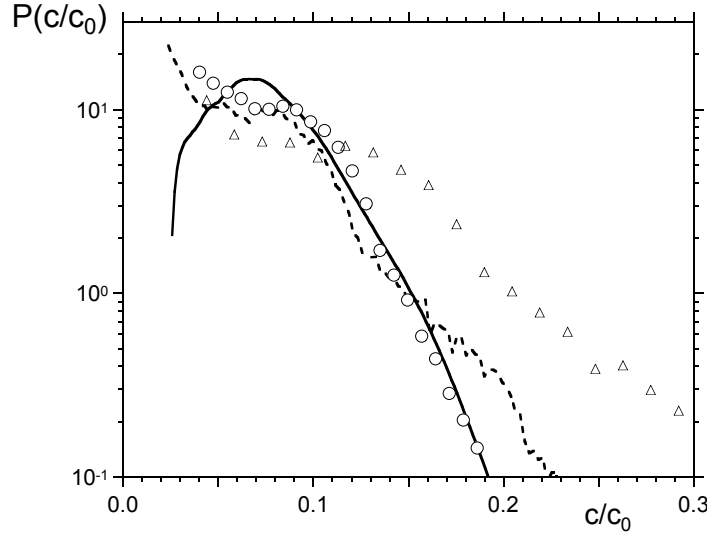


FIG. 6.10 – PDF de concentration du colorant obtenues expérimentalement au cours de la fusion turbulente. Les PDF sont prises avant la fusion ( $\triangle$ ) à  $t = 8$  s et après la fusion ( $\circ$ ) à  $t = 11$  s. La ligne discontinue est obtenue en faisant une contraction des concentrations d'un facteur  $\alpha = 0.6$  sur la PDF avant fusion. La ligne continue est obtenue par autoconvolution de la PDF avant fusion, et par contraction des concentrations d'un facteur  $\alpha = 0.37$ .

PDF de concentration obtenue après fusion en présence de l'instabilité est tracée par les symboles ( $\circ$ ) dans la figure 6.9. Elle est bien séparée des autres PDF, indiquant que la fusion en présence de l'instabilité est de nature très différente. Dans ce cas, la pente de la PDF est plus raide, indiquant que les concentrations ont été diluées lors de la fusion. Cela peut s'expliquer par la présence d'un fort étirement des filets de colorant. Cela peut être lié à l'apparition des structures longitudinales, qui convertissent l'écoulement laminaire des vortex primaires en un mouvement tridimensionnel contenant des petites échelles.

Pour tenter de retrouver la PDF de concentration après fusion à partir de la PDF avant fusion dans le cas turbulent, nous avons rajouté artificiellement une décroissance des niveaux de concentration. Pour cela, nous avons multiplié les concentrations par un facteur  $\alpha = 0.6$ , et nous avons divisé les densités de probabilité  $P(c)$  obtenues avant la fusion par  $\alpha$ , pour garder une PDF normalisée. Le résultat est tracé dans la figure 6.10 par une ligne discontinue. L'accord est qualitativement correct, mais la pente reste plus faible que celle obtenue expérimentalement après fusion.

Pour obtenir un meilleur accord avec les résultats expérimentaux, nous avons convolué la PDF avant la fusion avec elle-même, puis nous avons de nouveau rajouté une dissipation artificielle en contractant les concentrations d'un facteur  $\alpha = 0.37$ . Le résultat est tracé dans la figure 6.10 par une ligne continue et montre un accord correct avec les résultats expérimentaux. Cette autoconvolution de la PDF traduit le fait que la tache de colorant a commencé à se mélanger avec elle-même. En effet, lorsque deux taches de

colorant se mélangent, la concentration obtenue sur un pixel est issue de la somme de la concentration des deux taches de colorant initiales. La PDF du mélange des deux taches de colorant correspond ainsi à la convolution des PDF des deux taches initiales. Dans notre cas, l'autoconvolution de la PDF indique que la tache de colorant se mélange avec elle-même, parce que les filets de colorant commencent à se mélanger entre eux.

Il faut maintenant étudier comment les deux tourbillons se mélangent entre eux, en marquant chaque tourbillon avec un colorant différent. De cette manière, il semble possible de mesurer séparément les PDF de chaque tache de colorant. Cette étude sera faite ultérieurement, et devrait amener des renseignements précieux sur l'efficacité du mélange entre les deux vortex.



## 7. AUTRES RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

Au cours de mes travaux, nous nous sommes surtout intéressés à la fusion de deux tourbillons symétriques, à l'instabilité elliptique et à l'évolution d'un scalaire dans notre écoulement. Mais nous avons aussi étudié brièvement quelques phénomènes physiques reliés, qui sont présentés dans ce chapitre. Ces résultats sont préliminaires, et des analyses extensives seront probablement effectuées ultérieurement.

### 7.1 Fusion asymétrique

Nous avons observé la fusion bidimensionnelle de deux tourbillons pour des nombres de Reynolds faibles, dans le cas de deux tourbillons non symétriques. Nous avons vu dans le chapitre 4 que la taille des cœurs ne dépend pas de la vitesse angulaire des pales. En faisant tourner les pales à des vitesses différentes, on obtient ainsi deux tourbillons de même taille de cœur, et de circulations différentes. Les figures 7.1 et 7.2 présentent des champs de vorticité et des visualisations de la fusion de deux tourbillons pour un rapport des circulations  $\Gamma_1/\Gamma_2 = 2$ . Dans ce cas, la vitesse angulaire de rotation de la paire est donnée par  $\Omega = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2\pi b^2$ , et le temps est adimensionné par la période de rotation de la paire. Le nombre de Reynolds est défini par  $Re = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2\nu$ .

Pour un rapport des circulations égal à 2, le vortex le plus faible se déstabilise le premier. Il devient elliptique, puis s'étire à cause de la présence du champ d'étirement du vortex opposé, et s'enroule ensuite autour du vortex le plus gros. Cela correspond tout à fait aux simulations numériques faites par Dritschel & Waugh (1992) et aux observations expérimentales faites par Trieling *et al.* (1998) dans le cas où un des vortex est quasi-ponctuel.

Cependant, nous n'avons jamais observé toute la richesse de dynamique prédite par Dritschel & Waugh (1992). En effet, l'étirement du vortex le plus faible était toujours totale, et nous n'avons jamais observé d'étirement partiel. Pourtant le système devrait obligatoirement traverser la zone dans laquelle il y a de l'étirement partiel lorsque la taille des cœurs croît à partir d'une valeur très faible (voir la figure 1.8), si leurs résultats sont pertinents pour la réalité. Nous pensons que les nombres de Reynolds auxquels nous avons accès ne sont pas suffisamment importants pour que l'étirement reste partiel, ou bien que ces phénomènes partiels n'existent pas.

Dans la suite, il serait intéressant de déterminer comment le critère de fusion varie avec le rapport des circulations. Il serait aussi intéressant de

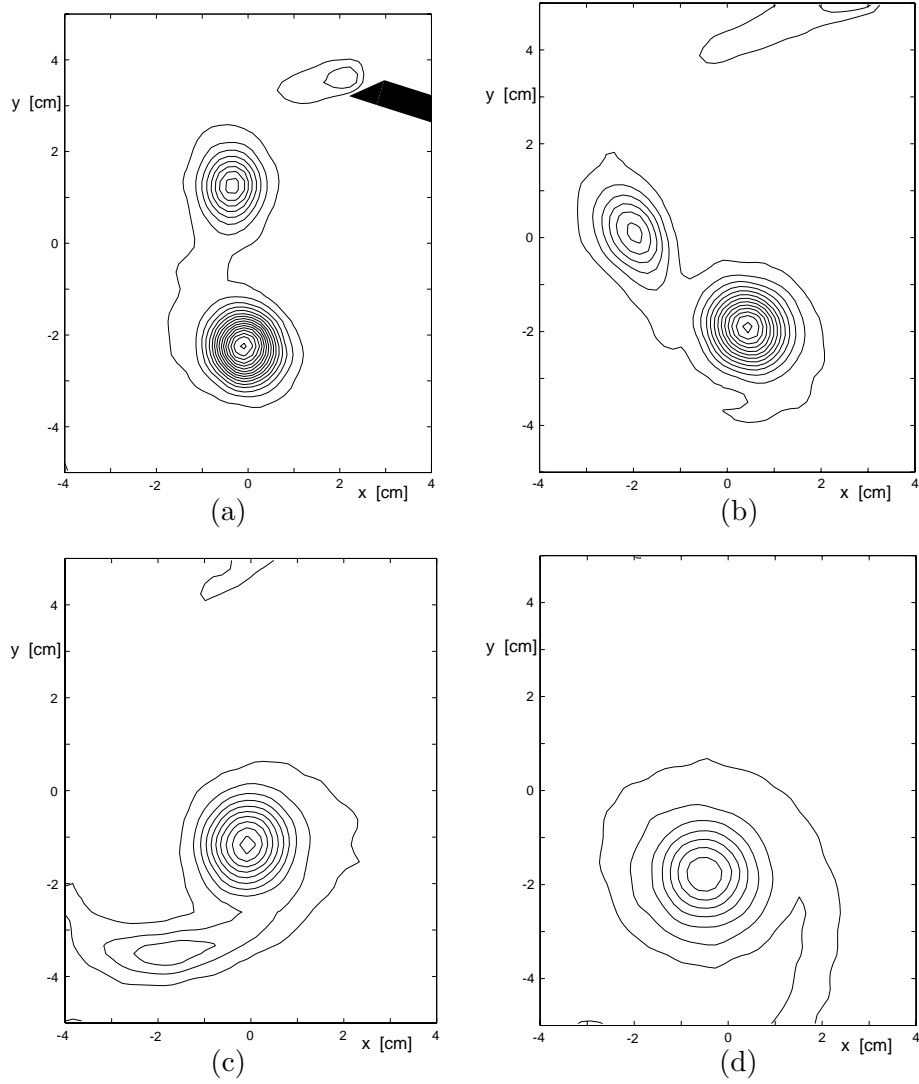


FIG. 7.1 – Champs de vorticité obtenus lors de la fusion bidimensionnelle asymétrique entre deux tourbillons, pour un nombre de Reynolds égal à 900 et un rapport des circulations  $\Gamma_1/\Gamma_2$  égal à 2. (a)  $t^* = 0.3$ , (b)  $t^* = 0.5$ , (c)  $t^* = 0.7$ , (d)  $t^* = 1.0$ .

regarder des tourbillons possédant des tailles de cœur différentes en créant un vortex bien avant l'autre, afin que la diffusion du premier vortex soit plus avancée lorsque le deuxième est créé.

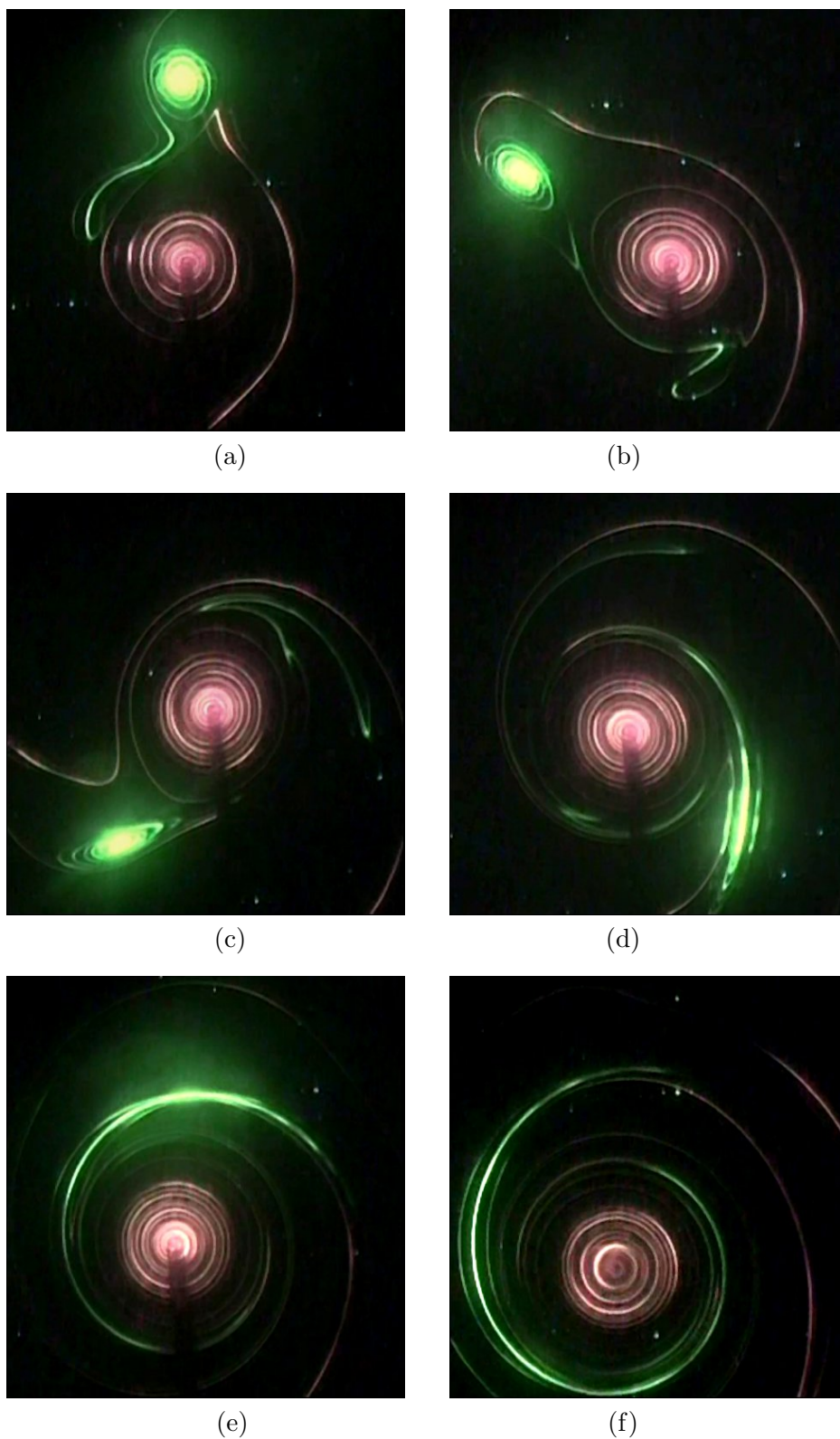


FIG. 7.2 – Visualisation au colorant de la fusion bidimensionnelle entre deux tourbillons asymétriques, pour un nombre de Reynolds égal à 900 et un rapport des circulations égal à 2. (a)  $t^* = 0.3$ , (b)  $t^* = 0.5$ , (c)  $t^* = 0.7$ , (d)  $t^* = 1.0$ , (e)  $t^* = 1.3$ , (f)  $t^* = 1.5$ .

## 7.2 Instabilité hyperbolique et structures secondaires

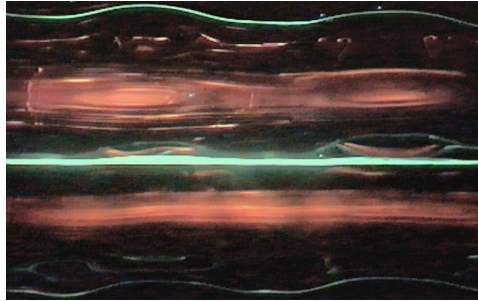
Nous avons vu que pour de forts nombres de Reynolds, la paire de tourbillons est instable par rapport à l'instabilité elliptique, qui est liée à la présence de points elliptiques aux cœurs des tourbillons. Dans une autre série d'expériences, nous avons excité des longueurs d'onde qui ne correspondent pas à la bande instable de l'instabilité elliptique, et nous avons trouvé un autre type d'instabilité, lié à la présence du point hyperbolique central. Cela a donné lieu à une publication parue dans la revue *Journal of Visualization*, Vol.4, No. 2 (2001) 115, sous le titre "Secondary structures in a corotating vortex pair", qui est insérée dans la suite du texte.

Nous présentons dans cet article l'apparition de tourbillons secondaires, perpendiculaires aux tourbillons initiaux. Ces structures secondaires sont créées par le fort champ d'étirement du point hyperbolique, qui intensifie la faible vortacité présente en ce point. Les tourbillons ainsi créés s'enroulent ensuite autour des tourbillons initiaux, comme dans le cas de l'instabilité elliptique. Cela crée une série de tourbillons toriques de sens alternés, qui sont très bien visibles dans la figure 7.3.

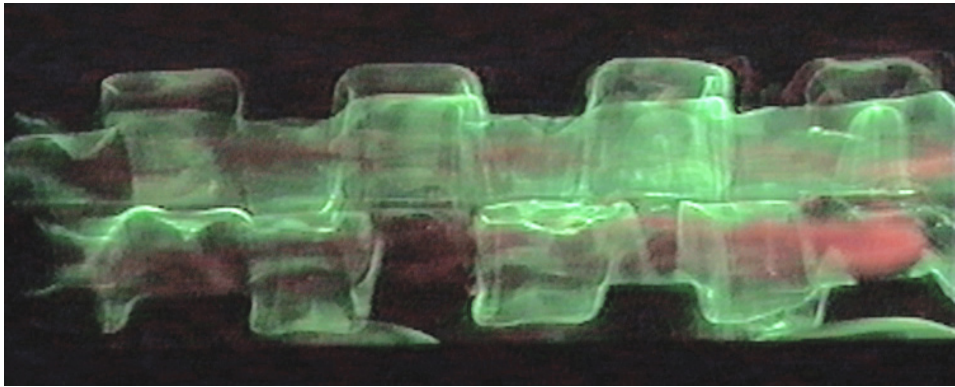
---

The sequence of figure 7.3 shows the evolution of two perturbed corotating vortices, generated in water using impulsively moved flat plates. The Reynolds number based on the circulation of one vortex is approximately 3000. The vortex cores are visualized using red dye (Rhodamin B), painted on the plate edges. In addition, a nylon thread coated with green fluorescent dye is placed in the middle between the two vortex centers (figure 7.3a). Illumination is achieved in a sheet (figure 7.3a) or in volume (figures 7.3b and 7.3c), using light from an Argon laser, and the flow is observed from the side, i.e. perpendicular to the vortex axes (the field of view is approx. 25 cm wide in figure 7.3b and 7.3c). The corotating vortices, which in their basic state rotate around each other, are perturbed by adding a sinusoidal deformation to the edge of the vortex-generating plates. This creates a periodic perturbation of vorticity between the vortices, near the dyed thread, where the basic flow exhibits a hyperbolic stagnation point. The corresponding strain stretches the vorticity perturbation into secondary vortex pairs, which are perpendicular to the primary vortices. At an early stage, this process leads to the peculiar square dye patterns in figure 7.3(b). In figure 7.3(c), taken about half a rotation period of the primary pair later, the secondary vortex pairs are clearly visible, as they now wrap around the outside of the corotating pair. The presence of the secondary structures amplifies the wavy deformation of the primary vortex cores, which are still visible in red. At a later stage, the two primary vortices merge into a single one, and the interaction with the perpendicular secondary vortices leads to a rapid breakdown of the flow into turbulent small-scale structures.

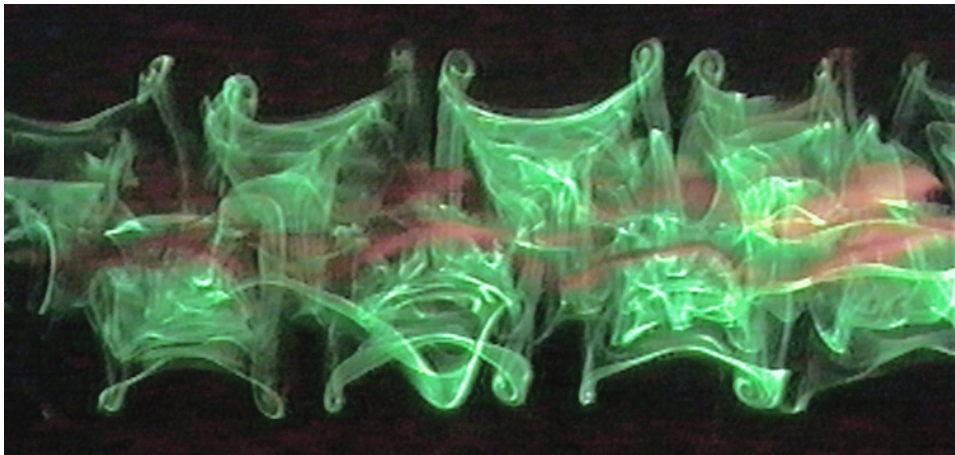




(a)



(b)



(c)

FIG. 7.3 – *Secondary structures in a corotating vortex pair for (a)  $t^* \approx 0.2$ , (b)  $t^* \approx 0.5$  and (c)  $t^* \approx 1.0$*

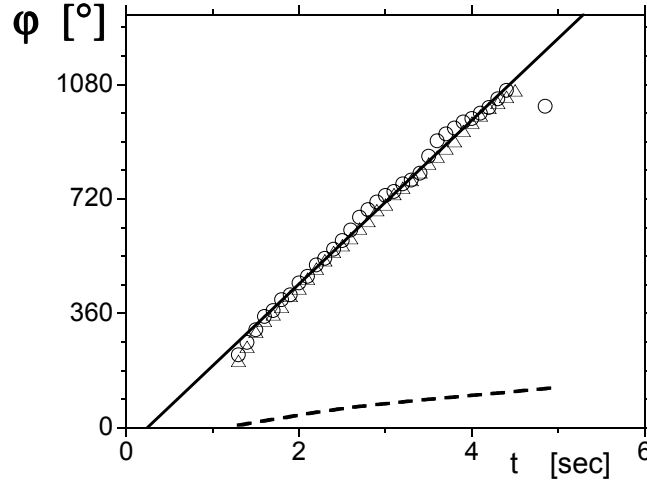


FIG. 7.4 – Angle que fait le plan de la perturbation de chaque vortex avec une direction fixe du repère du laboratoire. La droite correspond à une vitesse angulaire égale à  $\varpi = 4.52 \text{ s}^{-1}$ . La ligne discontinue indique l'angle que fait la paire de tourbillons avec une direction fixe.

### 7.3 Fréquence des modes de Kelvin

Lorsque nous excitons une longueur d'onde axiale  $\lambda$  à l'aide de bouts de scotch collés sur le bord de la pale, nous avons observé que le tourbillon est légèrement sinusoïdal au début de l'expérience. Cela ne correspond pas à une amplification par l'instabilité elliptique car la longueur d'onde excitée ne se trouve pas dans la bande instable prédite théoriquement (voir figure 7.5). Nous pensons que cela vient de la somme de deux modes de Kelvin de nombres d'onde azimutaux  $m = \pm 1$  que nous avons excités, et qui relaxent lentement car la viscosité est faible. En effet, l'amplitude de cette ondulation des vortex est faible et a tendance à décroître jusqu'à être invisible. Nous avons suivi l'orientation  $\varphi$  des plans des ondulations, qui est tracée dans la figure 7.4, en illuminant les tourbillons par deux tranches lumineuses (voir le chapitre 5). Ces mesures sont difficiles à réaliser car l'amplitude des ondulations est très faible. Il faut retirer les erreurs de parallaxe, qui sont liées au fait que les échelles spatiales ne sont pas identiques dans les deux plans de mesure. Nous avons cependant une bonne définition de la vitesse angulaire  $\varpi = 4.52 \text{ s}^{-1} \pm 1\%$ , à laquelle tournent les plans des ondulations (dans le référentiel du laboratoire).

Il faudrait adimensionner cette pulsation par la vitesse angulaire  $\mu$  au cœur du vortex pour pouvoir comparer cette valeur avec la prédiction théorique de la pulsation des ondes de Kelvin. Malheureusement, cette ondulation a été uniquement observée à des nombres de Reynolds très importants pour lesquels la PIV ne fonctionne pas aux cœurs des vortex. Il faudra donc réitérer ces expériences en utilisant des lasers Yag afin d'obtenir des champs de vitesse corrects aux cœurs des vortex. Cependant, on peut donner une approximation de la vitesse angulaire au cœur des vortex en supposant que la taille des cœurs est environ égale à 0.5 cm après l'enroulement des nappes

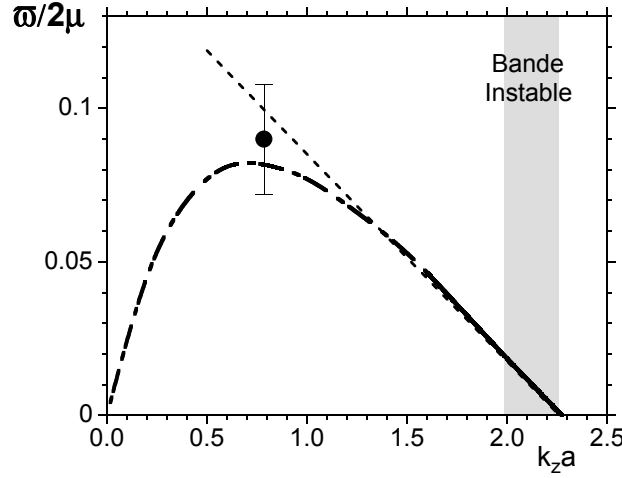


FIG. 7.5 – Pulsation du premier mode de Kelvin en fonction du nombre d'onde. La courbe en trait épais est tirée de Sipp (1999), le trait mixte indiquant la partie de la courbe où la dissipation est non nulle. La courbe en traits pointillés correspond à l'approximation linéaire donnée par Le Dizès & Laporte (2001a). Le point expérimental est représenté par le symbole (•). La théorie prévoit dans ce cas ( $a/b = 0.11$ ) que l'instabilité elliptique est présente uniquement dans la bande grisée.

de vorticité. Nous avons montré dans le chapitre 4 que c'est une bonne approximation juste après l'enroulement des nappes. La vitesse angulaire est alors égale à

$$\mu = \frac{\Gamma}{2\pi a^2} = 25 \text{ s}^{-1} \quad (7.1)$$

car la circulation peut être mesurée précisément, et vaut  $\Gamma = 40 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . On obtient alors un rapport expérimental :

$$\varpi/2\mu = 0.09 \quad (7.2)$$

Cela a été obtenu pour une longueur d'onde égale à 4 cm et le rapport  $\lambda/a$  est donc environ égal à 8. Pour cette valeur, la fréquence des ondes de Kelvin peut être obtenu à l'aide des formules données dans Le Dizès & Laporte (2001a) et vaut  $\varpi/2\mu = 0.106$ . Cependant, cette formule est valable dans une zone restreinte de longueurs d'ondes. Aux longueurs d'ondes considérées, elle s'écarte de façon visible de la courbe calculée numériquement par Sipp (1999), qui prend en compte les effets visqueux au niveau des couches critiques. Cette courbe est tracée dans la figure 7.5. Notre résultat expérimental se trouve au milieu entre les deux résultats précédents, et présente un bon accord avec ces prédiction. Cependant, il ne permet pas de confirmer ou d'infirmer ces prédiction.

Ce premier résultat est encourageant, et nous pensons donc qu'il est possible d'obtenir expérimentalement la relation de dispersion des ondes de Kelvin par cette technique en faisant varier la longueur d'onde excitée.



FIG. 7.6 – Visualisation de l'éclatement tourbillonnaire qui apparaît en présence d'un fort écoulement axial sur un tourbillon solitaire.

#### 7.4 Présence d'un écoulement axial

Nous aimerions étudier l'influence d'un écoulement axial sur l'instabilité elliptique, pour savoir si les longueurs d'onde et les taux de croissance sont modifiés en présence d'un écoulement axial. En effet, dans de nombreuses applications, les tourbillons possèdent une vitesse axiale au centre. Par exemple, les tourbillons derrière une aile d'avion possèdent une forte vitesse axiale, le fluide étant entraîné par l'aile.

Pour créer des tourbillons possédant une vitesse axiale, nous allons utiliser des plaques légèrement triangulaires. Cela entraîne un gradient de circulation le long de l'axe des tourbillons, qui provoque une vitesse axiale. Ce procédé a été utilisé avec succès dans le cas d'un tourbillon unique. La pale était de largeur nulle en bas et d'une largeur de 20 cm en haut. Cela créait une forte vitesse axiale au cœur du tourbillon. Le vortex était alors instable par rapport à l'éclatement tourbillonnaire, qui est visualisé dans la figure 7.6 et qui fait l'objet d'une étude extensive à l'heure actuelle.

Dans le cas de deux tourbillons, il faut que la vitesse de rotation de la paire soit constante le long des axes, pour éviter que les vortex s'enroulent en spirales autour du centre de rotation. Or nous avons vu que la vitesse de rotation de deux tourbillons asymétriques est proportionnelle à la circulation totale des deux vortex. Il faut donc créer des tourbillons dont la circulation augmente dans le sens des  $z$  positifs pour l'un et dans le sens des  $z$  négatifs pour l'autre. Cela semble être possible en prenant deux pales triangulaires inversées. Les vitesses axiales se propageront alors dans des sens opposés le long des vortex. Mais cela ne devrait pas influencer l'instabilité elliptique qui ne devrait pas dépendre du sens de la vitesse axiale.

## 8. CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons apporté des résultats expérimentaux nouveaux sur l'interaction de deux tourbillons corotatifs, parallèles et de même circulation. Ils ont été créés dans l'eau par deux pales mises en rotation de manière impulsive. Leur profil de vorticité est très proche de celui d'un vortex Gaussien de taille  $a$  et de circulation  $\Gamma$  :  $\omega = \Gamma e^{-r^2/a^2}/\pi a^2$ .

Nous avons analysé cet écoulement au moyen de visualisations au colorant en vue de côté et dans des coupes perpendiculaires aux axes des tourbillons. Nous avons de plus effectué des mesures par Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) pour obtenir les champs de vitesse dans des plans perpendiculaires aux axes des tourbillons. A cet effet, nous avons créé un algorithme de PIV, optimisé pour les écoulements possédant de forts gradients de vitesse. D'une part, les fenêtres d'interrogation sont translatées de manière symétrique, afin que la différence entre la vitesse Eulerienne en un point du champ de vitesse et le déplacement Lagrangien des particules soit un second ordre par rapport au temps entre les deux images. D'autre part, les fenêtres d'interrogation sont déformées dans un processus itératif, de manière à ce que les pics de corrélation ne soient pas affectés par les gradients de vitesse. Enfin, un filtre Gaussien est appliqué sur les images à la première itération afin de diminuer le nombre de vecteurs faux sur cette itération.

Il apparaît qu'à faible nombre de Reynolds, les deux tourbillons restent bidimensionnels et laminaires, mais fusionnent en un unique tourbillon selon un mécanisme possédant trois étapes. Dans une première étape, dont la durée est de l'ordre du temps visqueux, les deux tourbillons se comportent comme deux tourbillons quasi-ponctuels : la paire tourne sur elle-même avec une période égale à celle de deux vortex ponctuels et leur taille de cœur  $a$  augmente comme pour un vortex de Lamb-Oseen dans un fluide de viscosité cinématique  $\nu$  ( $a^2 = 4\nu t$ ).

Lorsque le rapport  $a/b$  de la taille du cœur et de la distance de séparation atteint une valeur critique, apparaît une transition vers une deuxième étape, régie par des phénomènes convectifs : les deux tourbillons se rapprochent et fusionnent en une demi-période de rotation de la paire, tout en éjectant des filaments de vorticité. En modélisant le temps de fusion en fonction du nombre de Reynolds, nous avons déterminé de manière précise le critère de fusion : le système de deux tourbillons Gaussiens de taille  $a$  séparés par une distance  $b$  devient instable lorsque le rapport  $a/b$  est supérieur à 0.244. Ce critère est en accord avec les études théoriques et numériques précédentes, si l'on suppose que la taille du cœur est définie à partir du moment d'ordre

deux  $J$  de la vorticité (  $a = \sqrt{J/\Gamma}$  ). Nous avons construit un modèle simplifié, en calculant le moment angulaire comme la somme du moment angulaire de deux vortex axisymétriques et du moment angulaire des filaments de vorticité. La conservation du moment angulaire total fixe alors la distance de séparation pour chaque taille de cœur, et indique que pour une taille de cœur critique, la distance de séparation saute de manière convective jusqu'à une valeur deux fois plus faible.

Dans une troisième étape, les filaments de vorticité s'enroulent autour du tourbillon nouvellement formé, qui redevient axisymétrique par l'effet couplé de la diffusion visqueuse et de la rotation différentielle. Le carré de la taille du cœur après la fusion est plus grand d'un facteur deux par rapport au carré de la taille du tourbillon initial, ce qui est intermédiaire entre les résultats de deux théories.

Cette description de la fusion est représentative des écoulements à faible nombre de Reynolds, dans lesquels les tourbillons restent bidimensionnels et laminaires. Cependant, lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 2000 l'écoulement devient de nature très différente. Bien que l'instabilité de Crow (  grande longueur d'onde) n'apparaisse pas en raison de la rotation du système, il apparaît une instabilité tridimensionnelle à petite longueur d'onde, liée à l'instabilité elliptique des modes de Kelvin de nombres azimutaux  $+1$  et  $-1$ . Pour chaque vortex, elle prend la forme d'une ondulation sinusoïdale du cœur du vortex, à l'intérieur d'un tube de courant invariant, comme dans le cas d'une paire de tourbillons ne tournant pas sur elle-même. La longueur d'onde est plus grande qu'en l'absence de rotation du système, ce qui est en accord avec la condition de résonance triadique des modes de Kelvin. De plus, le taux de croissance et la bande de longueur d'onde augmentent de manière significative, car la valeur du champ d'étirement au cœur de chaque vortex est amplifiée par la rotation du système. Les mesures de taux de croissance et de longueurs d'onde sont en très bon accord avec les prédictions théoriques. Enfin, cette instabilité tridimensionnelle modifie la fusion de manière significative. Les tourbillons fusionnent pour des rapports  $a/b$  de la taille du cœur et de la distance de séparation plus faibles, et donnent lieu à un tourbillon final plus turbulent qu'en l'absence d'instabilité tridimensionnelle.

Dans une troisième partie, nous avons analysé l'évolution d'une tache de colorant initialement placée dans un des deux tourbillons. Avant la fusion, ce scalaire s'enroule en une spirale et est soumis à de l'hyperdiffusion à cause de l'action couplée de l'étirement et de la diffusion. Un modèle simple prédit que le scalaire chute comme  $t^{-3/2}$  pour des temps supérieurs à un temps de mélange, qui est de l'ordre du nombre de Péclet à la puissance  $1/3$ . A partir de ce modèle, nous avons calculé théoriquement les densités de probabilité du scalaire en fonction du temps, et nous avons observé qu'elles varient très peu en fonction du temps, bien que le scalaire chute dans le temps de manière significative. Les résultats expérimentaux confirment cette évolution et sont en très bon accord avec la prédiction théorique aux temps courts. Finalement, l'évolution de la densité de probabilité du scalaire est mesurée

expérimentalement au cours de la fusion. Elle semble invariante dans le cas de la fusion laminaire sans instabilité tridimensionnelle. Par contre, le scalaire est fortement dilué et probablement mélangé avec lui-même dans le cas de la fusion turbulente en présence de l'instabilité tridimensionnelle, indiquant que la fusion est alors de nature radicalement différente.

Notre étude révèle ainsi la complexité de cet écoulement, qui est pourtant une des interactions les plus élémentaires entre deux tourbillons. L'instabilité elliptique de chaque tourbillon est issu d'un mécanisme physique simple, et semble être bien prédictible théoriquement. Par contre, nous avons vu apparaître un processus de filamentation de la vorticité, qui joue un rôle important dans la fusion et dans le mélange. Ce phénomène est mal compris à l'heure actuelle et peut grandement augmenter la complexité de la turbulence bidimensionnelle et tridimensionnelle. De plus amples renseignements sont nécessaires pour une meilleure compréhension du phénomène.

Dans l'avenir, il apparaît opportun de généraliser les observations qui ont été faites jusqu'à présent dans un cadre très académique. La fusion bidimensionnelle de deux tourbillons possédant des circulations ou des tailles de cœur différentes sera étudiée ultérieurement. De plus, l'effet d'un écoulement axial sur la présence et les caractéristiques de l'instabilité elliptique sera analysé de manière expérimentale et théorique. Enfin, le mélange des deux tourbillons au cours de la fusion sera étudié expérimentalement de manière précise.





## **ANNEXE**



## **A. INSTABILITÉ TRI-DIMENSIONNELLE AU COURS DE LA FUSION DE VORTEX**

Dans cette annexe, la publication parue en tant que lettre dans *Physics of Fluids*, 13(10) 2747–2750 (2001) sous le titre “ Three-dimensional instability during vortex merging ” est reproduite.



## **B. UN CRITÈRE DE FUSION POUR DEUX VORTEX CO-ROTATIFS BIDIMENSIONNELS**

Dans cette annexe, nous présentons les résultats des travaux effectués en collaboration avec Uwe Ehrenstein et Maurice Rossi, et qui ont donné lieu à une publication soumise à *Physics of Fluids* sous le titre “ Three-dimensional instability during vortex merging”.



## **C. INTÉRACTION CONTROLÉE DE VORTEX CO-ROTATIFS**

Dans cette annexe, nous présentons les résultats des travaux effectués en collaboration avec Florent Laporte et Denis Darracq, et qui ont donné lieu à une publication soumise à *Aerospace Science Technology* sous le titre “ Controlled interaction of co-rotating vortices ”.





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADRIAN R. J. (1988) Statistical Properties of Particle Image Velocimetry Measurements in Turbulent Flow. Pages 115–129 de: *Laser Anemometry in Fluid Mechanics - III*, R. J. ADRIAN *et al.* (éd.). LADOAN Instituto Superior Tecnico, Lisbon.
- [2] ADRIAN R. J. (1991) Particle-Imaging Techniques for Experimental Fluid Mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23**, 261–604.
- [3] AGULLO O. & VERGA A. D. (1997) Exact Two Vortices Solution of Navier-Stokes Equations. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(12), 2361–2364.
- [4] AGULLO O. & VERGA A. D. (2001) Effect of Viscosity in the Dynamics of Two Point Vortices: Exact Results. *Phys. Rev. E*, **63**(5), 1–14.
- [5] ARENDT S. & FRITTS D. C. (1998) The Instability of a Vortex Tube in a Weak External Shear and Strain. *Phys. Fluids*, **10**(2), 530–533.
- [6] BAJER K., BASSOM A. P. & GILBERT A. D. (2001) Accelerated Diffusion in the Centre of a Vortex. *J. Fluid Mech.*, **437**, 395–411.
- [7] BAYLY B. J. (1986) Three-Dimensional Instability of Elliptical Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **57**(17), 2160–2163.
- [8] BAYLY B. J., ORSZAG S. A. & HERBERT T. (1988) Instability Mechanisms in Shear-Flow Transition. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 359–391.
- [9] BENZI R., COLELLA M., BRISCOLINI M. & SANTANGELO P. (1992) A Simple Point Vortex Model for Two-Dimensional Decaying Turbulence. *Phys Fluids A*, **4**(5), 1036–1038.
- [10] BILANIN A. J., TESKE M. E. & WILLIAMSON G. G. (1977) Vortex Interactions and Decay in Aircraft Wakes. *AIAA Journal*, **15**(2), 250–260.
- [11] BILLANT P., BRANCHER P. & CHOMAZ J.-M. (1999) Three-Dimensional Stability of a Vortex Pair. *Phys. Fluids*, **11**(8), 2069–2077.
- [12] BRACCO A., MCWILLIAMS J. C., MURANTE G., PROVENZALE A. & WEISS J. B. (2000) Revisiting Freely Decaying Turbulence at Millennial Resolution. *Phys. Fluids*, **12**(11), 2931–2941.
- [13] BRANDT S. A. & IVERSEN J. D. (1977) Merging of Aircraft Trailing Vortices. *J. of Aircraft*, **14**(12), 1212–1230.
- [14] BROWN G. L. & ROSHKO A. (1974) On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layer. *J. Fluid Mech.*, **64**, 775.
- [15] BUNTINE J. D. & PULLIN D. I. (1989) Merger and Cancellation of Strained Vortices. *J. Fluid Mech.*, **205**, 263–295.
- [16] CADOT O., DOUADY S. & COUDER Y. (1995) Characterization of the Low-Pressure Filaments in a Three-Dimensional Turbulent Shear Flow. *Phys. Fluids*, **7**(3), 630–646.

- [17] CARDOSO O., MARTEAU D. & TABELING P. (1994) Quantitative Experimental Study of the Free Decay of Quasi-Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. E*, **49**(1), 454–461.
- [18] CARNEVALE G. F., MCWILLIAMS J. C., POMEAU Y., WEISS J. B. & YOUNG W. R. (1991) Evolution of Vortex Statistics in Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **66**(21), 2735–2737.
- [19] CARNEVALE G. F., CAVAZZA P., ORLANDI P. & PURINI R. (1991a) An Explanation for Anomalous Vortex Merger in Rotating-Tank Experiments. *Phys. Fluids*, **3**(5), 1411–1415.
- [20] CARTON X. & LEGRAS B. (1994) The Life-Cycle of Tripoles in Two-Dimensional Incompressible Flows. *J. Fluid Mech.*, **267**, 53–82.
- [21] CETEGEN B. M. & MOHAMAD N. (1993) Experiments on Liquid Mixing and Reaction in a Vortex. *J. Fluid Mech.*, **249**, 391–414.
- [22] CHEN A. L., JACOB J. D. & SAVAS Ö. (1999) Dynamics of a Corotating Vortex Pairs in the Wakes of Flapped Airfoils. *J. Fluid Mech.*, **378**, 155–193.
- [23] CHRISTIANSEN J. P. & ZABUSKY N. J. (1973) Instability, Coalescence and Fission of Finite-Area Vortex Structure. *J. Fluid Mech.*, **61**(2), 219–243.
- [24] CIFFONE D. L. (1977) Vortex Interactions in Multiple Vortex Wakes behind Aircraft. *J. of Aircraft*, **14**(6), 440–446.
- [25] CORCOS G. M. & SHERMAN F. S. (1984) The Mixing Layer: Deterministic Model of Turbulent Flow. Part 1. Introduction and the Two-Dimensional Flow. *J. Fluid Mech.*, **139**, 29–65.
- [26] CORSIGLIA V. R., ROSSOW V. J. & ROSSOW D. L. (1976) Experimental Study of the Effect of Span Loading on Aircraft Wakes. *J. of Aircraft*, **13**(12), 968–973.
- [27] CORSIGLIA V. R., IVERSEN J. D. & ORLOFF K. L. (1978) Laser-Velocimeter Surveys of Merging Vortices in a Wind Tunnel. *J. of Aircraft*, **15**(11), 762–768.
- [28] CRAIK A. D. D. (1989) The Stability of Unbounded Two- and Three-Dimensional Flows Subject to Body Forces: Some Exact Solutions. *J. Fluid Mech.*, **198**, 275–292.
- [29] CRAIK A. D. D. & CRIMINALE W. O. (1986) Evolution of Wavelike Disturbances in Shear Flow: a Class of Exact Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **406**, 275–292.
- [30] CROW S. C. (1970) Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices. *AIAA J.*, **8**(12), 2172–2179.
- [31] DEE F. W. & NICHOLAS O. P. (1968) *ARC CP*, 1065.
- [32] DEVENPORT W. J., VOGEL C. M. & ZSOLDOS J. S. (1999) Flow Structure Produced by the Interaction and Merger of a Pair of Co-rotating Wing-Tip Vortices. *J. Fluid Mech.*, **394**, 357–377.
- [33] DRAZIN P. G. & REID W. H. (1981) *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [34] DRITSCHEL D. G. & WAUGH D. W. (1992) Quantification of the Inelastic Interaction of Unequal Vortices in Two-dimensional Vortex Dynamics. *Phys Fluids A*, **4**(8), 1737–1744.

- 
- [35] DRITSCHEL D. D. (1986) The Nonlinear Evolution of Rotating Configurations of Uniform Vortices. *J. Fluid Mech.*, **172**, 157–182.
  - [36] DRITSCHEL D. G. (1985) The Stability and Energetics of Corotating Uniform Vortices. *J. Fluid Mech.*, **157**, 95–134.
  - [37] DRITSCHEL D. G. (1990) The Stability of Elliptical Vortices in an External Straining Flow. *J. Fluid Mech.*, **210**, 223–261.
  - [38] DRITSCHEL D. G. (1995) A General Theory for Two-Dimensional Vortex Interactions. *J. Fluid Mech.*, **293**, 269–303.
  - [39] EHRENSTEIN U. & ROSSI M. (1999) Equilibria of Corotating Non-Uniform Vortices. *Phys. Fluids*, **25**(12), 3416.
  - [40] ELOY C. (2000) *Instabilité Multipolaire de Tourbillons*. Ph.D. thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.
  - [41] ELOY C. & LE DIZÈS S. (1999) Three-Dimensional Instability of Burgers and Lamb-Oseen Vortices in a Strain Field. *J. Fluid Mech.*, **378**, 145–166.
  - [42] ELOY C. & LE DIZÈS S. (2001) Stability of the Rankine Vortex in a Multipolar Strain Field. *Phys. Fluids*, **13**(03), 660–676.
  - [43] ELOY C., LE GAL P. & LE DIZÈS S. (2000) Experimental Study of the Multipolar Instability. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3400–3403.
  - [44] FINCHAM A. & DELERCE G. (2000) Advanced Optimization of Correlation Imaging Velocimetry Algorithms. *Exp. Fluids*, **29/S1**, S13–S22.
  - [45] FINCHAM A. M. & SPEDDING G. R. (1997) Low Cost, High Resolution DPIV for Measurement of Turbulent Fluid. *Exp. Fluids*, **23**, 449–462.
  - [46] FINE K. S., DRISCOLL C. F., MALMBERG J. H. & MITCHELL T. B. (1991) Measurements of Symmetric Vortex Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(5), 588–591.
  - [47] FINE K. S., CASS A. C., FLYNN W. G. & DRISCOLL C. F. (1995) Relaxation of 2D Turbulence to Vortex Crystals. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(18), 3277–3280.
  - [48] FLOHR P. & VASSILICOS J. C. (1997) Accelerated Scalar Dissipation in a Vortex. *J. Fluid Mech.*, **348**, 295–317.
  - [49] FRISCH U. (1995) *Turbulence*. Cambridge University Press.
  - [50] FUH C.-S. & MARAGOS P. (1991) Motion Displacement Estimation Using an Affine Model for Image Matching. *Optical Engineering*, **30**(7), 881–887.
  - [51] GREENSPAN H. P. (1968) *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
  - [52] GRIFFITHS R. W. & HOPFINGER E. J. (1986) Experiments with Baroclinic Vortex Pairs in a Rotating Fluid. *J. Fluid Mech.*, **173**, 501–518.
  - [53] GRIFFITHS R. W. & HOPFINGER E. J. (1987) Coalescing of Geostrophic Vortices. *J. Fluid Mech.*, **178**, 73–97.
  - [54] HART D. P. (2000) PIV Error Correction. *Exp. Fluids*, **29**, 13–22.
  - [55] HE X. (1994) The Most Probable Critical Distance for Two Unequal Vortices in Two-Dimensional Turbulence. *Chaos, Solitons and Fractals*, **4**(7), 1183–1191.

- 
- [56] HO C.-M. & HUANG L.-S. (1982) Subharmonics and Vortex Merging in Mixing Layers. *J. Fluid Mech.*, **119**, 443–473.
  - [57] HOPFINGER E. & VAN HEIJST G. J. F. (1993) Vortices in Rotating Fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 241–289.
  - [58] HUANG H. T., FIEDLER H. E. & WANG J. J. (1993a) Limitation and improvement of PIV Part I: Limitation of Conventional Techniques due to Deformation of Image Patterns. *Exp. Fluids*, **15**, 168–174.
  - [59] HUANG H. T., FIEDLER H. E. & WANG J. J. (1993b) Limitation and Improvement of PIV Part I: Particle Image Distortion, a Novel Technique. *Exp. Fluids*, **15**, 263–273.
  - [60] IDE K. & WIGGINS S. (1995) The Dynamics of Elliptically Shaped Regions of Uniform Vorticity in Time-Periodic, Linear External Velocity Fields. *Fluid Dyn. Res.*, **15**, 205–235.
  - [61] IVERSEN J. D., CORSIGLIA V. R., PARK S., BACKHUS D. R. & BRICKMAN R. A. (1979) Hot-Wire, Laser-Anemometer, and Force Measurements of Interacting Trailing Vortices. *J. of Aircraft*, **16**(7), 448–454.
  - [62] JACOBS P. A. & PULLIN D. I. (1985) Coalescence of Stretching Vortices. *Phys. Fluids*, **28**(6), 1619–1625.
  - [63] JACQUIN L., FABRE D., GEOFFRE P. & COUSTOLS E. (2001) The Properties of a Transport Aircraft Wake in the Extended Near Field: an Experimental Study. *AIAA Paper*, **2001–1038**.
  - [64] JAMBUNATHAN K., JU X. Y., DOBBINS B. N. & ASHFORTH-FROST S. (1995) An Improved Cross Correlation Technique for Particle Image Velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, **6**, 507–514.
  - [65] JIMÉNEZ J., WRAY A. A., SAFFMAN P. G. & ROGALLO R. S. (1993) The Structure of Intense Vorticity in Homogeneous Isotropic Turbulence. *J. Fluid Mech.*, **255**, 65–90.
  - [66] JIMÉNEZ J., MOFFATT H. K. & VASCO C. (1996) The Structure of the Vortices in Two-Dimensional Turbulence. *J. Fluid Mech.*, **313**, 209.
  - [67] JIMÉNEZ J. (1975) Stability of a Pair of Co-Rotating Vortices. *Phys. Fluids*, **18**(11), 1580–1581.
  - [68] KADEN H. (1931) Aufmicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche. *Ing. Arch.*, **2**, 140.
  - [69] KATYSHEV Y. V., MAKHALDIANI N. V., MAKHANKOV V. G. & SCHVACHKA A. B. (1979) Stable Solutions for Vortex Systems. *Phys. Lett.*, **73A**(1), 39–40.
  - [70] KELVIN L. (1883) *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*. Macmillan.
  - [71] KELVIN (LORD). (1880) Vibrations of a Columnar Vortex. *Phil. Mag.*, **10**, 155–168.
  - [72] KERSWELL R. R. (2001) Elliptical Instability. *Ann. Rev. Fluid Mech.*
  - [73] KIDA S. & OHKITANI K. (1992) Spatiotemporal Intermittency and Instability of a Forced Turbulence. *Phys Fluids A*, **4**(5), 1018–1027.
  - [74] KLEIN R. & KNIO O. (1995a) Asymptotic Vorticity Structure and Numerical Simulation of Slender Vortices. *J. Fluid Mech.*, **284**, 275–321.

- 
- [75] KLEIN R. & MAJDA A. J. (1993) An Asymptotic Theory for the Non-linear Instability of Antiparallel Pairs of Vortex Filaments. *Phys. Fluids A*, **5**(2), 369–379.
- [76] KLEIN R., MAJDA A. J. & DAMODARAN K. (1995b) Simplified Equations for the Interactions of Nearly Parallel Vortex Filaments. *J. Fluid Mech.*, **288**, 201–248.
- [77] KRUTZSCH C.-H. (1939) Über eine Experimentell Beobachtete Erscheinung an Wirbelringen bei ihrer Translatorischen Bewegung in Wirklichen Flüssigkeiten. *Ann. Phys.* (5), **35**, 497–523.
- [78] LAGNADO R. R. & LEAL L. G. (1990) Visualization of Three-Dimensional Flow in a Four-Roll Mill. *Exp. Fluids*, **9**(25), 25–32.
- [79] LAGNADO R. R., PHAN-THIEN N. & LEAL L. G. (1984) The Stability of Two-Dimensional Flows. *Phys. Fluids*, **27**(5), 1094–1101.
- [80] LANDMAN M. J. & SAFFMAN P. G. (1987) The Three-Dimensional Instability of Strained Vortices in a Viscous Fluid. *Phys. Fluids*, **30**(8), 2339–2342.
- [81] LANSKY I. M. & O’NEIL T. M. (1997) A Theory of Vortex Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(8), 1479–1482.
- [82] LAPORTE F. & CORJON A. (2000) Direct Numerical Simulations of the Elliptic Instability of a Vortex Pair. *Phys. Fluids*, **12**(5), 1016–1031.
- [83] LAPORTE F. & LEWEKE T. (2001) Elliptic Instability of Trailing Vortices: Experiment and Direct Numerical Simulation. *Soumis à AIAA Journ.*
- [84] LE DIZÈS S., ROSSI M. & MOFFATT H. K. (1996) On the Three-Dimensional Instability of Elliptical Vortex Subjected to Stretching. *Phys. Fluids*, **8**(8), 2084–2090.
- [85] LE DIZÈS S. (2000a) Non-Axisymmetric Vortices in Two-Dimensional Flows. *J. Fluid Mech.*, **406**, 175–198.
- [86] LE DIZÈS S. (2000b) Three-Dimensional Instability of a Multipolar Vortex in a Rotating Flow. *Phys. Fluids*, **12**(11), 2762.
- [87] LE DIZÈS S. & LAPORTE F. (2001a) Theoretical Predictions for the Elliptic Instability in a Two-Vortex Flow. *soumis à J. Fluid Mech.*
- [88] LE DIZÈS S. & VERGA A. (2001b) Viscous Interactions of Two Co-Rotating Vortices Before Merging. *soumis à J. Fluid Mech.*
- [89] LEBLANC S. (1997) Stability of Stagnation Points in Rotating Flows. *Phys. Fluids*, **9**(11), 3566–3569.
- [90] LEBLANC S. & CAMBON C. (1998) Effects of the Coriolis Force on the Stability of Stuart Vortices. *J. Fluid Mech.*, **356**, 353–379.
- [91] LEGRAS B. & DRITSCHEL D. G. (1991) The Elliptical Model of Two-Dimensional Vortex Dynamics. I: The Basic State. *Phys Fluids A*, **3**(5), 845–853.
- [92] LEWEKE T. & WILLIAMSON C. H. K. (1997) *Long-Wavelength and Reconnection of a Vortex Pair*. Pages 225–234 de: *Dynamics of Slender Vortices*, KRAUSE E. & GERSTEN K. (éds.).
- [93] LEWEKE T. & WILLIAMSON C. H. K. (1998) Cooperative Elliptic Instability of a Vortex Pair. *J. Fluid Mech.*, **360**, 85–119.

- 
- [94] LEWEKE T., MEUNIER P., LAPORTE F. & DARRACQ D. (2001) Controlled Interaction of Co-Rotating Vortices. submitted to *Aerosp. Sci. Techn.*
  - [95] LIFSCHITZ A. & HAMEIRI E. (1991) Local Stability Conditions. *Phys. Fluids A*, **3**(11), 2644–2651.
  - [96] LIN H. J. & PERLIN M. (1998) Improved Methods for Thin, Surface Boundary Layer Investigations. *Exp. Fluids*, **25**, 431–444.
  - [97] LUNDGREN T. S. (1982) Strained Spiral Vortex Model for Turbulent Fine Structure. *Phys. Fluids*, **25**(12), 2193–2203.
  - [98] MALKUS W. V. R. (1989) An Experimental Study of Global Instabilities Due to Tidal (Elliptical) Distortion of a Rotating Elastic Cylinder. *Astrophys. Fluid Dynamics*, **48**, 123–134.
  - [99] MARBLE F. E. (1988) *Mixing, Diffusion and Chemical Reaction of Liquids in a Vortex Field*. Pages 581–596 de : *Chemical Reactivity in Liquids: Fundamental Aspects*, MOREAU M. & TURQ P. (éds.). Plenum.
  - [100] MARTEAU D., CARDOSO O. & TABELING P. (1995) Equilibrium States of Two-Dimensional Turbulence: an Experimental Study. *Phys. Rev. E*, **51**(5), 5124–5127.
  - [101] MAXWORTHY T. (1972) The Structure and Stability of Vortex Rings. *J. Fluid Mech.*, **51**, 15.
  - [102] MCWILLIAMS J. C. (1984) The Emergence of Isolated Coherent Vortices in Turbulent Flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.
  - [103] MELANDER M. V. & MCWILLIAMS J. C. (1987b) Axisymmetrization and Vorticity-Gradient Intensification of an Isolated Two-dimensional Vortex through Filamentation. *J. Fluid Mech.*, **178**, 137–159.
  - [104] MELANDER M. V., ZABUSKY N. J. & STYCZEK A. S. (1986) A Moment Model for Vortex Interactions of the Two-Dimensional Euler Equations. Part 1. Computational Validation of a Hamiltonian Elliptical Representation. *J. Fluid Mech.*, **167**, 95–115.
  - [105] MELANDER M. V., ZABUSKY N. J. & MCWILLIAMS J. C. (1987a) Asymmetric Vortex Merger in Two Dimensions: Which Vortex is "Victorious"? *Phys. Fluids*, **30**(9), 2604, 2610–2612.
  - [106] MELANDER M. V., ZABUSKY N. J. & MCWILLIAMS M. J. (1988) Symmetric Vortex Merger in Two Dimensions: Causes and Conditions. *J. Fluid Mech.*, **195**, 303–340.
  - [107] MEUNIER P. & LEWEKE T. (1999b) *Merging and Three-Dimensional Instability in a Corotating Vortex Pair*. Pages 241–251 de : *Vortex Structure and Dynamics*, MAUREL A. & PETITJEAN P. (éds.). Springer.
  - [108] MEUNIER P., LEWEKE T. & ABID M. (2000c) *Three-Dimensional Instability of Two Merging Vortices*. Pages 15–18 de : *Advances in Turbulence VIII*, DOPAZO C. (éd.).
  - [109] MEUNIER P. & LEWEKE T. (1999a) Merging of a pair of corotating vortices. *Album of Visualisation*, **16**, 1–2.
  - [110] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2000a) Unstable Vortex Merger. *Phys. Fluids*, **12**(9), S6. Gallery of Fluid Motion.
  - [111] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2000b) Merging of a pair of corotating vortices. *Album of Visualisation*, **17**, Cover Page.

- 
- [112] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2001a) Effect of a Three-Dimensional Instability on Vortex Merging. *Phys. Fluids*, **13**(10), 2747–2750.
  - [113] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2001c) Analysis and Optimization of the Error caused by High Velocity Gradients in PIV. *soumis à Exp. Fluids*.
  - [114] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2001d) Elliptic Instability of a Co-Rotating Vortex Pair. *en préparation pour J. Fluid Mech.*
  - [115] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2001e) Secondary Structures in a Corotating Vortex Pair. *J. Visualization*, **4**(2), 115.
  - [116] MEUNIER P., EHRENSTEIN U., LEWEKE T. & ROSSI M. (2001b) A Merging Criterion for Two-Dimensional Co-Rotating Vortices. *soumis à Phys. Fluids*.
  - [117] MITCHELL B. E., LELE S. K. & MOIN P. (1995) Direct Computation of the Sound from a Compressible Co-Rotating Vortex Pair. *J. Fluid Mech.*, **285**, 181–202.
  - [118] MITCHELL B. E., LELE S. K. & MOIN P. (1999) Direct Computation of the Sound Generated by Vortex Pairing in an Axisymmetric Jet. *J. Fluid Mech.*, **383**, 113–142.
  - [119] MITCHELL T. B. & DRISCOLL C. F. (1996) Electron Vortex Orbits and Merger. *Phys. Fluids*, **8**(7), 1828–1841.
  - [120] MITCHELL T. B., DRISCOLL C. F. & FINE K. S. (1993) Experiments on Stability of Equilibria of Two Vortices in a Cylindrical Trap. *Phys. Rev. Lett.*, **71**(9), 1371–1374.
  - [121] MITCHELL T. B. (1993) *Experiments on Electron Vortices in a Malmberg-Penning Trap*. Ph.D. thesis, University of California, San Diego.
  - [122] MIYAZAKI T. & FUKUMOTO Y. (1992) Three-Dimensional Instability of Strained Vortices in a Stably Stratified Fluid. *Phys. Fluids*, **4**(11), 2515–2521.
  - [123] MIYAZAKI T., IMAI T. & FUKUMOTO Y. (1995) Three-Dimensional Instability of Kirchhoff's Elliptic Vortex. *Phys. Fluids*, **7**(1), 195–202.
  - [124] MOORE D. W. & SAFFMAN P. G. (1971) *Structure of a Line Vortex in an Imposed Strain*. Pages 339–354 de: *Aircraft Wake Turbulence and its Detection*, OLSEN J., GOLDBURG A. & ROGERS M. (éds.). New York: Plenum Press.
  - [125] MOORE D. W. & SAFFMAN P. G. (1975a) The Density of Organized Vortices in a Turbulent Mixing Layer. *J. Fluid Mech.*, **69**(3), 465–473.
  - [126] MOORE D. W. & SAFFMAN P. G. (1975b) The Instability of a Straight Filament in a Strain Field. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **346**, 413–425.
  - [127] NOGUEIRA J., LECUONA A. & RODRIGUEZ P. A. (1999) Local Field Correction PIV: on the Increase of accuracy of Digital PIV Systems. *Exp. Fluids*, **27**, 107–116.
  - [128] ORSZAG S. A. & PATERA A. T. (1983) Secondary Instability of Wall-Bounded Shear Flows. *J. Fluid Mech.*, **128**, 313–338.
  - [129] OVERMAN E. A. & ZABUSKY N. J. (1982) Evolution and Merger of Isolated Vortex Structures. *Phys. Fluids*, **25**(8), 1297–1305.

- [130] PIERREHUMBERT R. T. (1986) Universal Short-Wave Instability of Two-Dimensional Eddies in an Inviscid Fluid. *Phys. Rev. Lett.*, **57**(17), 2157–2159.
- [131] PIERREHUMBERT R. T. & WIDNALL S. E. (1981) The Structure of Organized Vortices in a Free Shear Layer. *J. Fluid Mech.*, **102**, 301–313.
- [132] POLVANI L. M., ZABUSKY N. J. & FLIERL G. R. (1989) Two-Layer Geostrophic Vortex Dynamics. Part 1. Upper-Layer V-States and Merger. *J. Fluid Mech.*, **205**, 215–242.
- [133] POTYLITSIN P. G. & PELTIER W. R. (1999) Three-Dimensional Destabilization of Stuart Vortices: the Influence of Rotation and Ellipticity. *J. Fluid Mech.*, **387**, 205–226.
- [134] PROVANSAL M. & LEWEKE T. (1998) *The modeling of bluff body wakes using amplitude equations*. Page 5153 de: *1998 ASME-FED Summer Meeting*, vol. 245.
- [135] RAFFEL M., WILLERT C. & KOMPENHANS J. (1998) *Particle Image Velocimetry: a Practical Guide*. Springer-Verlag.
- [136] RAJ P. & IVERSEN J. D. (1980) Computational Simulation of Turbulent Vortex Merger and Decay. *AIAA Journal*, **18**(8), 865–866.
- [137] RANZ W. E. (1979) Application of a Stretch Model to Mixing, Diffusion and Reaction in Laminar and Turbulent Flows. *AIChE J.*, **25**, 41–47.
- [138] RAYLEIGH (LORD). (1916) On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **93**, 148–154.
- [139] RHINES P. B. & YOUNG W. R. (1983) How Rapidly is a Passive Scalar Mixed within Closed Streamlines. *J. Fluid Mech.*, **133**, 133–145.
- [140] RICCARDI G. & PIVA R. (1998) Motion of an Elliptical Vortex under Rotating Strain: Conditions for Asymmetric Merging. *Fluid Dyn. Res.*, **23**, 63–88.
- [141] RICCARDI G., PIVA R. & BENZI R. (1995) A Physical Model for Merging in Two-Dimensional Decaying Turbulence. *Phys. Fluids*, **7**(12), 3091–3104.
- [142] ROBERTS K. V. & CHRISTIANSEN J. P. (1972) Topics in Computational Fluid Mechanics. *Computer Phys. Comm. (suppl.)*, **3**, 14–32.
- [143] ROBINSON A. C. & SAFFMAN P. G. (1984) Three-Dimensional Instability of an Elliptical Vortex in a Straining Field. *J. Fluid Mech.*, **142**, 451–466.
- [144] ROSHKO A. (1976) Structure of Turbulent Shear Flows: A New Look. *J. Fluid Mech.*, **14**(10), 1349–1357.
- [145] ROSSOW V. J. (1977) Convective Merging of Vortex Cores in Lift-Generated Wakes. *J. of Aircraft*, **14**(3), 283–290.
- [146] SAFFMAN P. G. (1992) *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- [147] SAFFMAN P. & SZETO R. (1980) Equilibrium of a Pair of Equal Uniform Vortices. *Phys. Fluids*, **23**(12), 2339–2342.
- [148] SCARANO F. & RIETHMULLER M. L. (2000) Advances in Iterative Multigrid PIV Image Processing. *Exp. Fluids*, **29**/S1, S51–S60.



- 
- [149] SCHECTER D. A., DUBIN D. H. E., FINE K. S. & DRISCOLL C. F. (1999) Vortex Crystals from 2D Euler Flow : Experiment and Simulation. *Phys. Fluids*, **11**(4), 905–914.
- [150] SIPP D. & JACQUIN L. (1998) Elliptic Instability in Two-Dimensional Flattened Taylor-Green Vortices. *Phys. Fluids*, **10**(4), 839–849.
- [151] SIPP D. (1999) *Instabilités dans les Ecoulements Tourbillonnaires*. Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique.
- [152] STEGER J. L. & KUTLER P. (1977) Implicit Finite-Difference Procedures for the Computation of Vortex Wakes. *AIAA Journal*, **15**(4), 581–590.
- [153] TABELING P., BURKHART S., CARDOSO O. & WILLAIME H. (1991) Experimental Study of Freely Decaying Two-Dimensional Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(27), 3772–3775.
- [154] TAYLOR G. I. (1923) Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **223**, 289–343.
- [155] THOMAS P. J. & AUERBACH D. (1994) The Observation of the Simultaneous Development of a Long- and a Short-Wave Instability Mode on a Vortex Pair. *J. Fluid Mech.*, **265**, 289–302.
- [156] TRIELING R. R., BECKERS M. & VAN HEIJST G. J. F. (1997) Dynamics of Monopolar Vortices in a Strain Flow. *J. Fluid Mech.*, **345**, 165–201.
- [157] TRIELING R. R., LINSEN A. H. & VAN HEIJST G. J. F. (1998) Monopolar Vortices in an Irrotational Annular Shear Flow. *J. Fluid Mech.*, **360**, 273–294.
- [158] TSAI C.-Y. & WIDNALL S. E. (1976) The Stability of Short Waves on a Straight Vortex Filament in a Weak Externally Imposed Strain Field. *J. Fluid Mech.*, **73**(4), 721–733.
- [159] VASSILICOS J. C. (1995) Anomalous Diffusion of Isolated Flow Singularities and of Fractal or Spiral Structures. *Phys. Rev. E*, **52**(6), R1–R4.
- [160] VILLERMAUX E. & REHAB H. (2000) Mixing in Coaxial Jets. *J. Fluid Mech.*, **425**, 161–185.
- [161] VILLERMAUX E., SIOUX B. & GAGNE Y. (1995) Intense Vortical Structure in Grid-Generated Turbulence. *Phys. Fluids*, **7**(8), 2008–2013.
- [162] VILLERMAUX E., INNOCENTI C. & DUPLAT J. (1998) Histogrammes des Fluctuations Scalaires dans le Mélange Turbulent. *C. R. Acad. Sci. Paris, IIb*, **326**, 21–26.
- [163] VINCENT A. & MENEGUZZI M. (1991) The Spatial Structure and Statistical Properties of Homogeneous Turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 1–20.
- [164] VLADIMIROV V. A., MAKARENKO V. G. & TARASOV V. F. (1987) Experimental Investigation of non-Axisymmetric Inertia Waves in a Rotating Fluid. *Fluid Dyn.*, **22**, 151.
- [165] VOGEL C. M., DEVENPORT W. M. & ZSOLDOS J. S. (1995) *Turbulence Structure of a Pair of Merging Tip Vortices*. Pages 13–18 de: *10th Symposium on Turbulent Shear Flows, Pennsylvania State University*, vol. 1.

- 
- [166] VOSBEEK P. W. C., VAN GEFFEN J. H. G. M., MELESHKO V. V. & VAN HEIJST G. J. F. (1997) Collapse Interactions of Finite-Sized Two Dimensional Vortices. *Phys. Fluids*, **9**(11), 3315–3322.
- [167] WALEFFE F. (1990) On the Three-Dimensional Instability of Strained Vortices. *Phys. Fluids A*, **2**, 76.
- [168] WANG H. (1998) Short Wave Instability on Vortex Filaments. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(21), 4665–4668.
- [169] WAUGH D. W. (1992) The Efficiency of Symmetric Vortex Merger. *Phys Fluids A*, **4**(8), 1745–1758.
- [170] WEISS J. B. & MCWILLIAMS J. C. (1993) Temporal Scaling Behavior of Decaying Two-Dimensional Turbulence. *Phys Fluids A*, **5**(3), 608–621.
- [171] WERELEY S. T. & MEINHART C. D. (2001) Second-Order Accurate Particle Image Velocimetry. *Exp. Fluids*, **31**, 258–268.
- [172] WESTERWHEEL J. (2000) Theoretical Analysis of the Measurement Precision in Particle Image Velocimetry. *Exp. Fluids*, **29/S1**, S3–S12.
- [173] WESTERWHEEL J. (1993) *Digital Particle Image Velocimetry*. Ph.D. thesis, Delft University Press.
- [174] WESTERWHEEL J. (1994) Efficient Detection of Spurious Vectors in Particle Image Velocimetry Data. *Exp. Fluids*, **16**, 236–247.
- [175] WIDNALL S. E. & SULLIVAN J. P. (1973) On the Stability of Vortex Rings. *Proc. Roy. Soc. A*, **332**, 335–353.
- [176] WIDNALL S. E., BLISS D. & ZALAY A. (1971) *Theoretical and Experimental Study of the Stability of a Vortex Pair*. Pages 305–338 de: *Aircraft Wake Turbulence and its Detection*, OLSEN J., GOLDBURG A. & ROGERS M. (éds.). New York: Plenum Press.
- [177] WIDNALL S. E. (1975) The Structure and Dynamics of Vortex Filaments. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **7**, 141–165.
- [178] WIDNALL S. E., BLISS D. B. & TSAI C.-Y. (1974) The Instability of Short Waves on a Vortex Ring. *J. Fluid Mech.*, **66**(1), 35–47.
- [179] WILLERT C. E. & GHARIB M. (1991) Digital Particle Image Velocimetry. *Exp. Fluids*, **10**, 181–193.
- [180] WILLIAMSON C. H. K. (1996) Vortex Dynamics in the Cylinder Wake. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **28**, 477–539.
- [181] WINANT C. D. & BROWAND F. K. (1974) Vortex Pairing: the Mechanism of Turbulent Mixing Layer Growth at Moderate Reynolds Number. *J. Fluid Mech.*, **63**(2), 237–255.
- [182] WOHNAS A. & VASSILICOS J. C. (2001) Mixing in Frozen and Time-Periodic Two-Dimensional Flows. *J. Fluid Mech.*, **442**, 359–385.
- [183] YAO H. B., ZABUSKY N. J. & DRITSCHER D. G. (1995) High Gradient Phenomena in Two-Dimensional Vortex Interactions. *Phys. Fluids*, **7**(3), 539–548.

# Experimental Study of Two Corotating Vortices

## Abstract

This thesis deals with the experimental study of two parallel corotating vortices of equal circulation. The vortices are created in water by the impulsive movement of two flat plates, and are analysed using dye visualizations and Particle Image Velocimetry (PIV). We have created a PIV algorithm, optimized for flows with high velocity gradients, which translates the interrogation windows in a symmetric way, and deforms them according to the velocity gradients.

At low Reynolds numbers, the vortices remain two-dimensional and laminar, and merge into a single final vortex in a three-stage mechanism: (1) the viscous growth of the core radii up to 24% of the separation distance, (2) the convective merging, *i.e.* the kinematic reorganization of the vorticity into a single core with spiral arms of vorticity, and (3) the axisymmetrization and viscous diffusion of the final vortex. The final vortex has a core size whose square is twice the square of the core size of the initial vortices. By analyzing the angular momentum of the filaments, we have constructed a model which predicts a destabilization of the vortex pair with a sudden decrease of the separation distance, when the core size exceeds a critical value.

At high Reynolds numbers, the merging process is modified by the development of a three-dimensional instability, linked to an elliptic instability of the vortex cores, which creates a wavy perturbation of the vortex centerline inside an invariant stream tube. The growth rate and the width of the band of unstable wavelengths increase with the rotation of the vortex pair, and the experimental measurements are in good agreement with theoretical predictions. Merging of the vortices appears for smaller core sizes and leads to a bigger and more turbulent vortex than in the absence of a three-dimensional instability.

At last, we analysed the evolution of a blob of dye in one of the vortices. At early stages, this scalar is subject to a hyperdiffusion process, due to the coupled presence of stretching and diffusion. A simple model predicts a temporal decrease of the scalar as  $t^{-3/2}$ , but shows that the probability density function of the scalar is stationary, in agreement with the experimental result. At late stages, the probability density function of the scalar is not modified by the two-dimensional merging, but is displaced towards low values of the scalar in the case of turbulent merging, linked to the presence of high stretching rates in the three-dimensional flow.

---

**Keywords:** Vortex dynamics, vortex merging, elliptic instability, hyperdiffusion of a scalar, PIV, dye visualizations.

---

## Résumé

Cette thèse porte sur l'étude expérimentale de deux tourbillons corotatifs parallèles, créés dans l'eau par le mouvement impulsif de deux plaques planes, et analysés au moyen de visualisations au colorant et de Visualisation par Images de Particules (PIV). Nous avons créé un algorithme de PIV optimisé pour les écoulements à forts gradients de vitesse, qui translate les fenêtres d'interrogation de manière symétrique puis les déforme en fonction des gradients de vitesse.

Aux faibles nombres de Reynolds, les tourbillons restent bidimensionnels et laminaires et fusionnent en un unique vortex en trois étapes : (1) la croissance visqueuse des cœurs jusqu'à une taille critique égale à 24% de la distance de séparation, (2) la fusion convective, et (3) l'axisymétrisation du vortex final, dont le carré de la taille du cœur vaut deux fois le carré de la taille des vortex initiaux. Un modèle, basé sur le moment angulaire des filaments, prédit une déstabilisation du système de deux vortex et une chute de la distance de séparation, lorsque la taille du cœur dépasse une valeur critique.

Aux nombres de Reynolds élevés, il apparaît une instabilité tridimensionnelle, liée à l'instabilité elliptique des cœurs des vortex, créant l'ondulation des cœurs des vortex à l'intérieur d'un tube de courant invariant. Le taux de croissance et la largeur de la bande de longueurs d'onde sont en très bon accord avec les prédictions théoriques. La fusion apparaît pour des tailles de cœur plus faibles, et donnent lieu à un vortex final plus turbulent et plus gros qu'en l'absence de l'instabilité tridimensionnelle.

Enfin, nous avons analysé l'évolution d'une tache de colorant dans un des tourbillons de la paire. Ce scalaire est soumis à de l'hyperdiffusion grâce à l'action couplée de l'étirement et de la diffusion. Un modèle simple prédit une décroissance du scalaire comme  $t^{-3/2}$ , mais indique que la densité de probabilité du scalaire reste stationnaire, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux. La densité de probabilité du scalaire évolue peu dans le cas de la fusion laminaire, mais décroît fortement lors de la fusion turbulente.

---

**Discipline :** Systèmes Complexes : Phénomènes hors équilibre, micro et nano électronique

---

**Mots Clés :** Dynamique tourbillonnaire, fusion de vortex, instabilité elliptique, hyperdiffusion d'un scalaire, PIV, visualisations au colorant.

---

**Laboratoire :** Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre  
CNRS UMR 6594, Universités Aix-Marseille I et II  
49, rue Frederic Joliot-Curie, B.P. 146  
F-13384 Marseille Cedex 13, France.